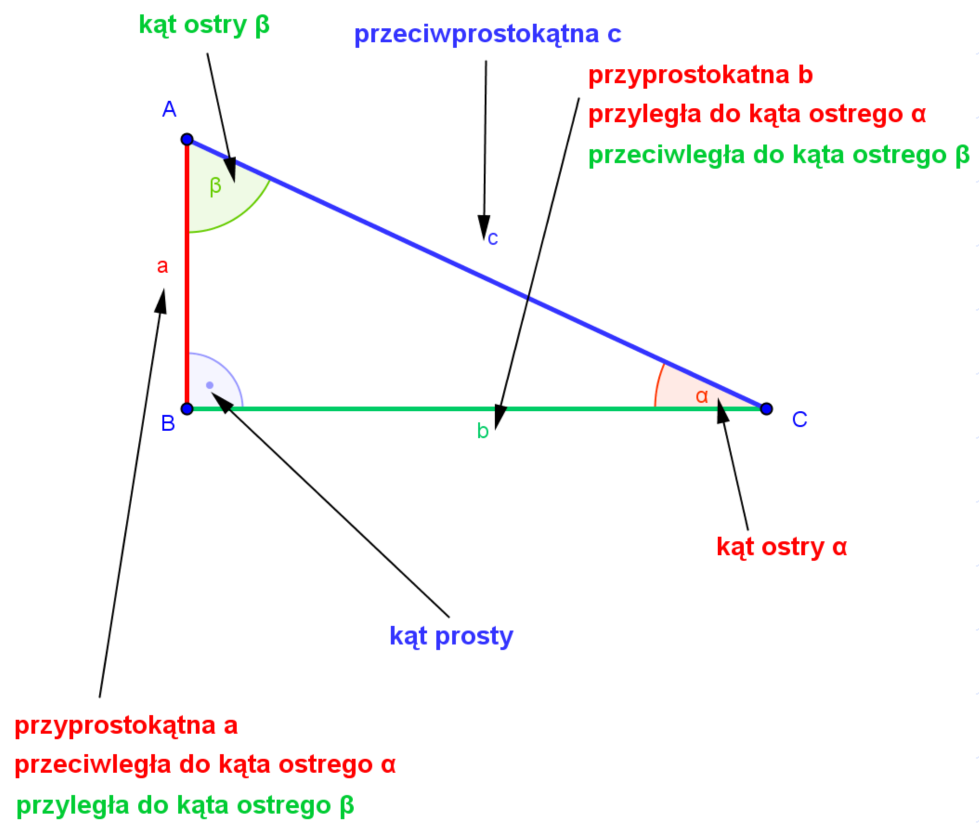
FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE

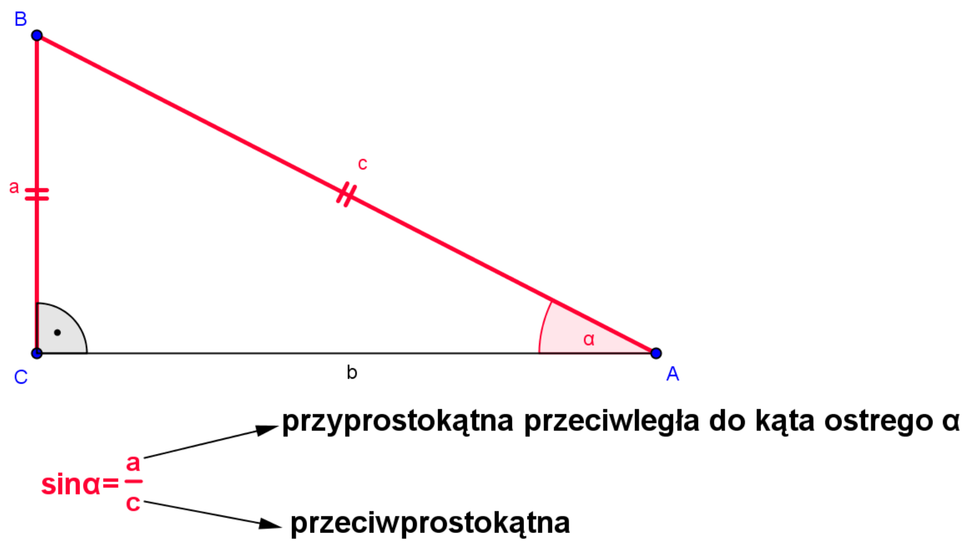
HARALD KAJZER ZST Nr 2 im. Mariana Batko

TRÓJKĄT PROSTOKĄTNY



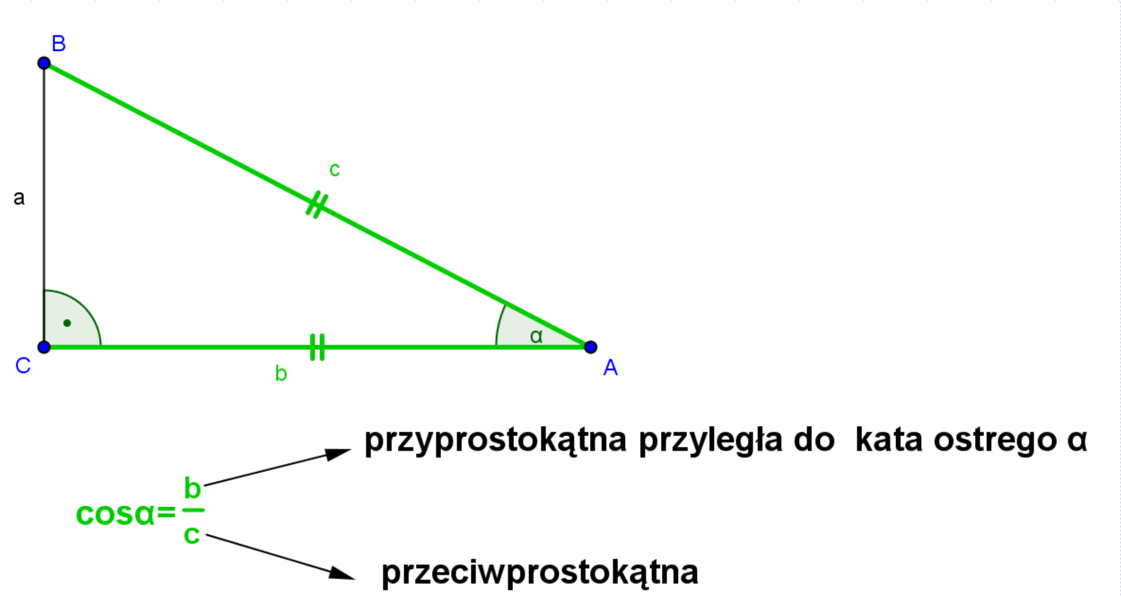
DEFINICJA SINUSA

Sinusem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej (do tego kąta) do długości przeciwprostokątnej



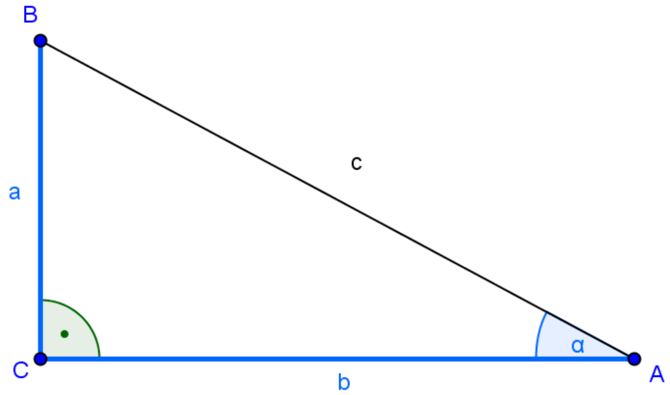
DEFINICJA COSINUSA

Cosinusem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej (do tego kąta) do długości przeciwprostokątnej.



DEFINICJA TANGENSA

Tangensem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej (do tego kąta) do długości drugiej przyprostokątnej.



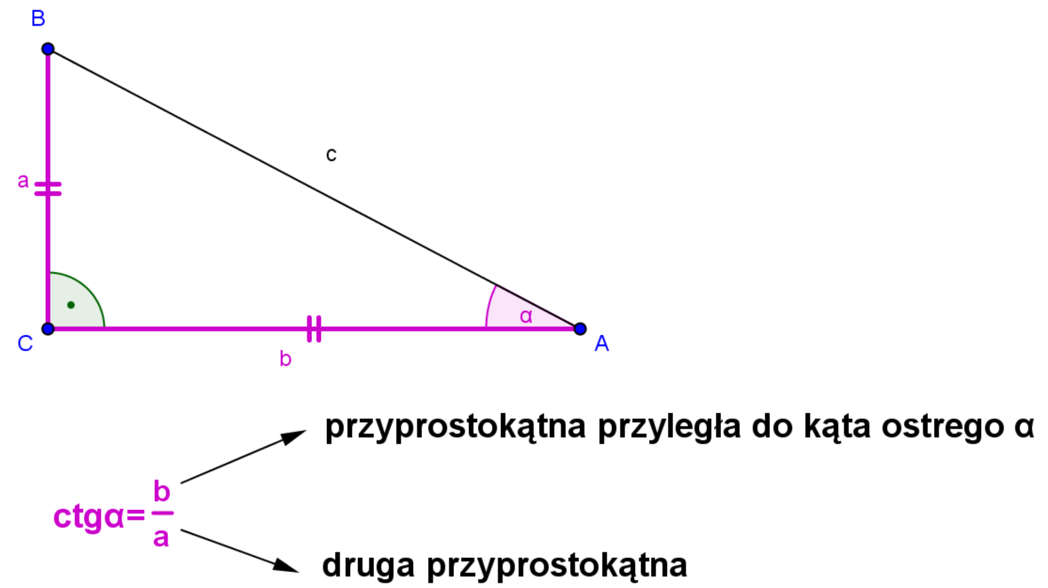
$$tg\alpha = \frac{a}{b}$$

przyprostokątna przeciwległa do kata α

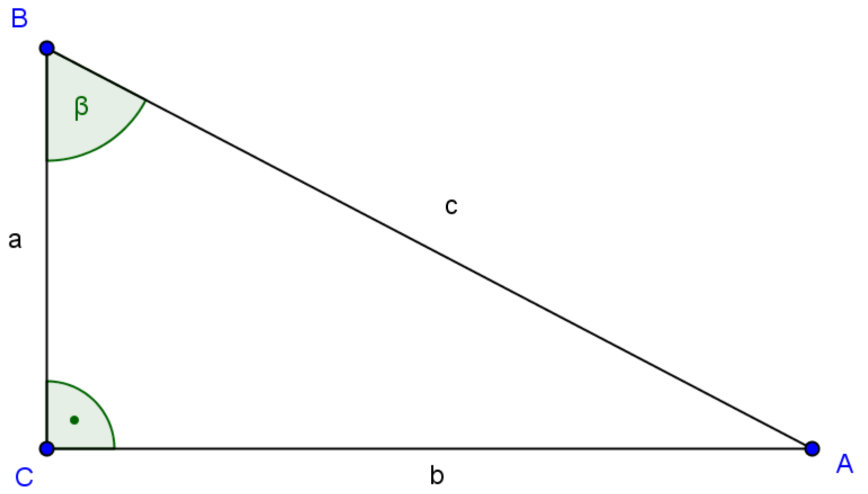
druga przyprostokatna

DEFINICJA COTANGENSA

Cotangensem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej (do tego kąta) do długości drugiej przyprostokątnej.



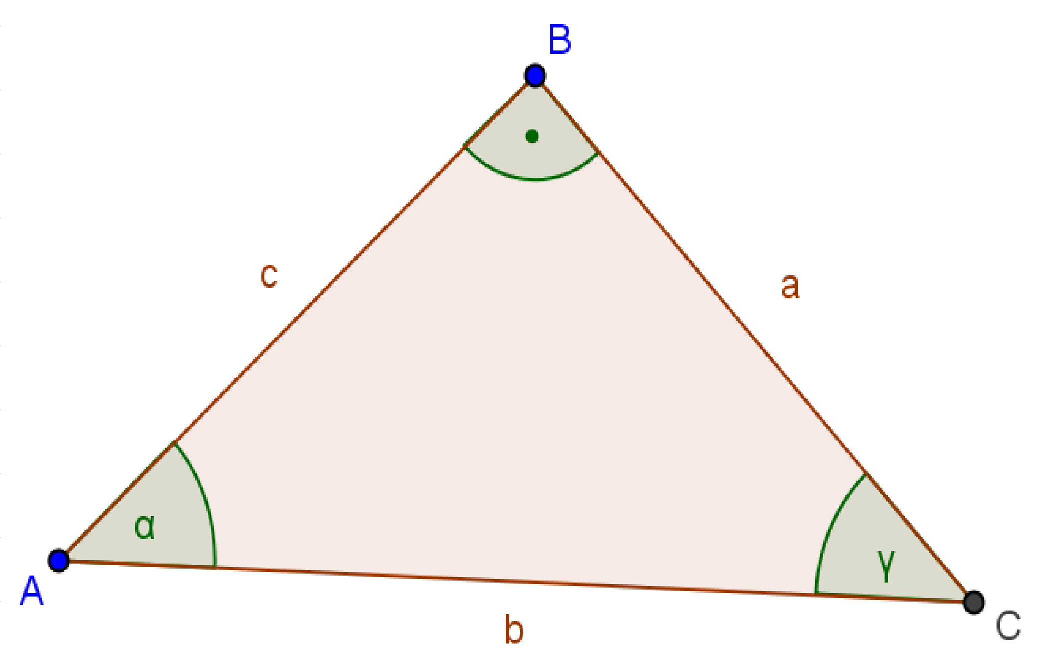
DEFINICJE



$\sin\beta = \frac{b}{c}$	$\mathrm{tg}\beta = \frac{b}{a}$
$\cos\beta = \frac{a}{c}$	$\mathrm{ctg}\beta = \frac{a}{b}$

PRZYKŁADY

Uzupełnij zapisy:



$$\sin\alpha = \frac{a}{b}$$

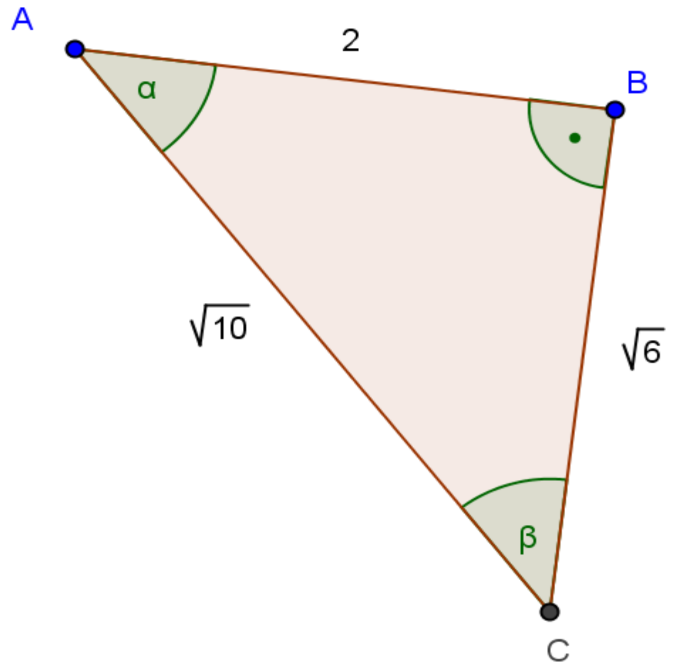
$$\cos\gamma = \frac{a}{b}$$

$$tg\gamma = \frac{c}{a}$$

$$ctg\alpha = \frac{c}{a}$$

ZADANIE

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów α i β:



$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$tg\alpha = ctg\beta = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$ctg\alpha = tg\beta = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

ODPOWIEDZI sinα, cosβ

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{60}}{10} = \frac{\sqrt{4 \cdot 15}}{10} = \frac{2\sqrt{15}}{10} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

POWRÓT

ODPOWIEDZI cosα, sinβ

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

POWRÓT

ODPOWIEDZI tgα, ctgβ

$$tg\alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$ctg\beta = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

POWRÓT

ODPOWIEDZI ctgα, tgβ

$$ctg\alpha = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

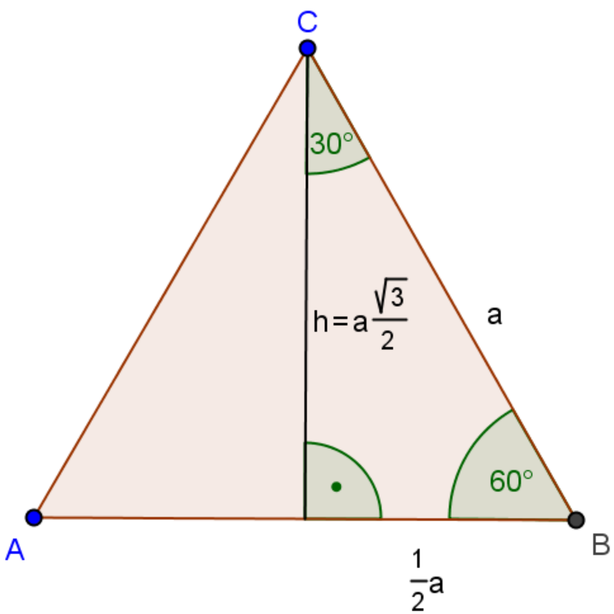
$$tg\beta = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

POWRÓT

WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH

DLA $\alpha=30^{o}$

TRÓJKĄT PROSTOKĄTNY O KĄCIE 30^{o} UZYSKAMY PROWADZĄC WYSOKOŚĆ
W TRÓJKĄCIE RÓWNOBOCZNYM



$$\sin 30^0 = \cos 60^0 = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{2}$$

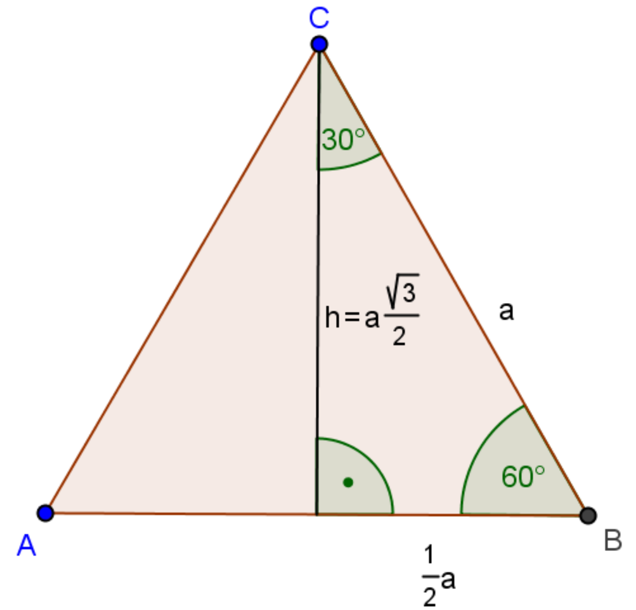
$$\cos 30^0 = \sin 60^0 = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg30^0 = ctg60^0 = \frac{\frac{1}{2}a}{h} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}a\cdot\frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$ctg30^0 = tg60^0 = \frac{h}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{3}$$

DLA $\alpha=60^o$

TRÓJKĄT PROSTOKĄTNY O KĄCIE 60^o UZYSKAMY PROWADZĄC WYSOKOŚĆ
W TRÓJKĄCIE RÓWNOBOCZNYM



$$\sin 60^0 = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

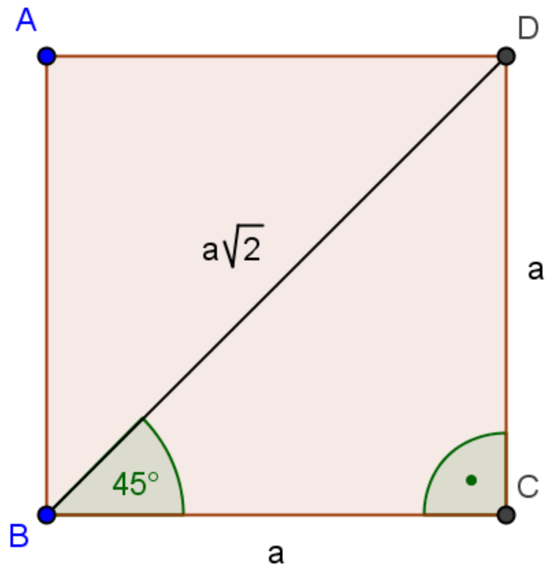
$$\cos 60^0 = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$$

$$tg 60^0 = ctg 30^0 = \sqrt{3}$$

$$ctg 60^0 = tg 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

DLA $\alpha=45^{o}$

TRÓJKĄT PROSTOKĄTNY O KĄCIE 45^{o} UZYSKAMY PROWADZĄC PRZEKĄTNĄ W KWADRACIE



$$\sin 45^{0}=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^{0}=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg45^{0}=\frac{a}{a}=1$$

$$ctg45^{0}=\frac{a}{a}=1$$

TABELA WARTOŚCI

	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\mathrm{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

DLA DOWOLYCH KĄTÓW

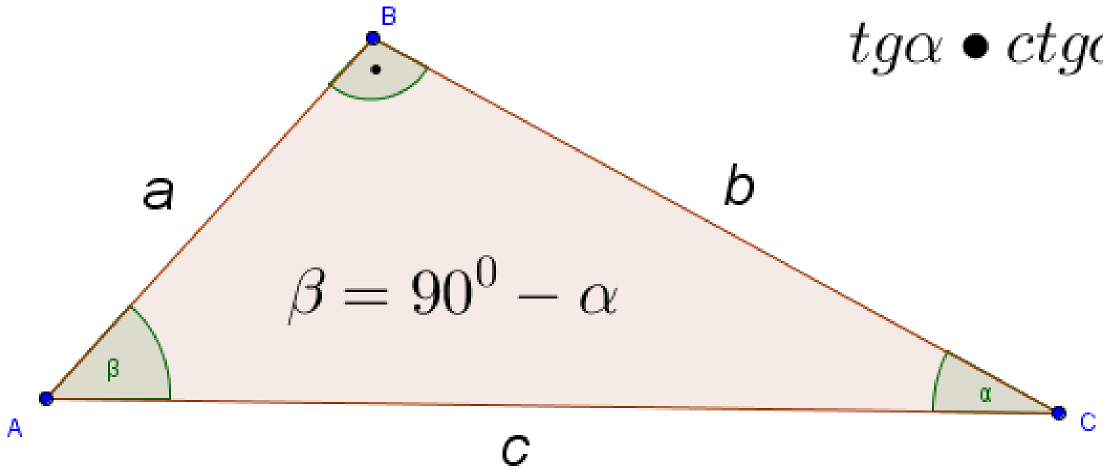
α [°]	$\sin\alpha$ / $\cos\beta$	$\mathrm{tg}\,\alpha$ / $\mathrm{ctg}\,\beta$	β [°]
0	0,0000	0.0000	90
1	0.0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0.0523	0.0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0.0875	85
6	0,1045	0,1051	84
7	0,1219	0,1228	83
8	0,1392	0,1405	82
9	0,1564	0,1584	81
10	0,1736	0,1763	80
11	0,1908	0,1944	79
12	0,2079	0,2126	78
13	0,2250	0,2309	77
14	0,2419	0,2493	76
15	0,2588	0,2679	75
16	0,2756	0,2867	74
17	0,2924	0,3057	73
18	0,3090	0,3249	72
19	0,3256	0,3443	71
20	0,3420	0,3640	70

α [°]	$\sin\alpha$ / $\cos\beta$	$\mathrm{tg}\,\alpha$ / $\mathrm{ctg}\,\beta$	β [°]
46	0,7193	1,0355	44
47	0,7314	1,0724	43
48	0,7431	1,1106	42
49	0,7547	1,1504	41
50	**0,7660**	**1,1918**	**40**
51	0,7771	1,2349	39
52	0,7880	1,2799	38
53	0,7986	1,3270	37
54	0,8090	1,3764	36
55	0,8192	1,4281	35
56	0,8290	1,4826	34
57	0,8387	1,5399	33
58	0,8480	1,6003	32
59	0,8572	1,6643	31
60	**0,8660**	**1,7321**	**30**
61	0,8746	1,8040	29
62	0,8829	1,8807	28
63	0,8910	1,9626	27
64	0,8988	2,0503	26
65	0,9063	2,1445	25
66	0,9135	2,2460	24

WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH - HARALD KAJZER

ZWIĄZKI MIĘDZY FUNKCJAMI TRYGONOMETRYCZNYMI

ZWIĄZEK MIĘDZY tgα i ctgα

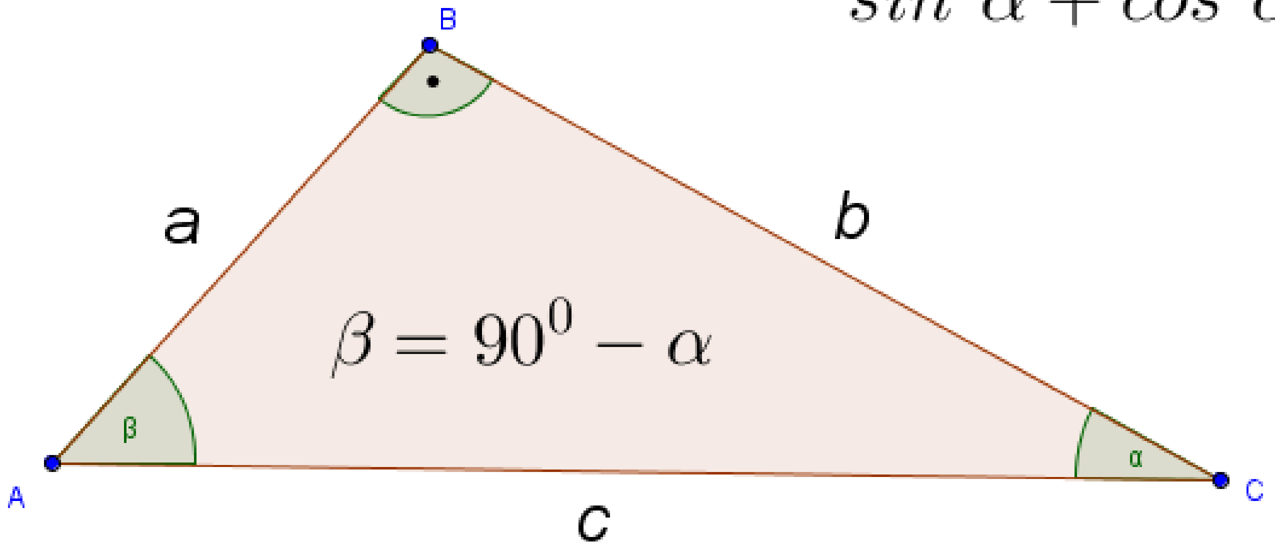


$$\beta = 90^0 - \alpha$$

$$tg\alpha \bullet ctg\alpha = \frac{a}{b} \bullet \frac{b}{a} = 1$$

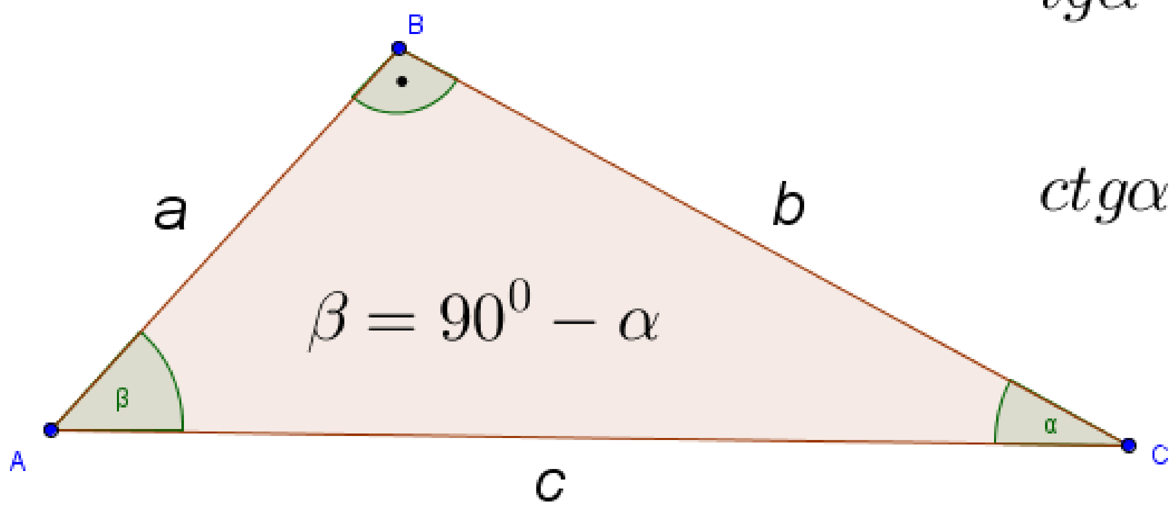
ZWIĄZEK MIĘDZY sinα i cosα (jedynka trygonometryczna)

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$



$$\beta = 90^0 - \alpha$$

ZWIĄZEK MIEDZY $tg\alpha$ i $ctg\alpha$ a $sin\alpha$ i $cos\alpha$



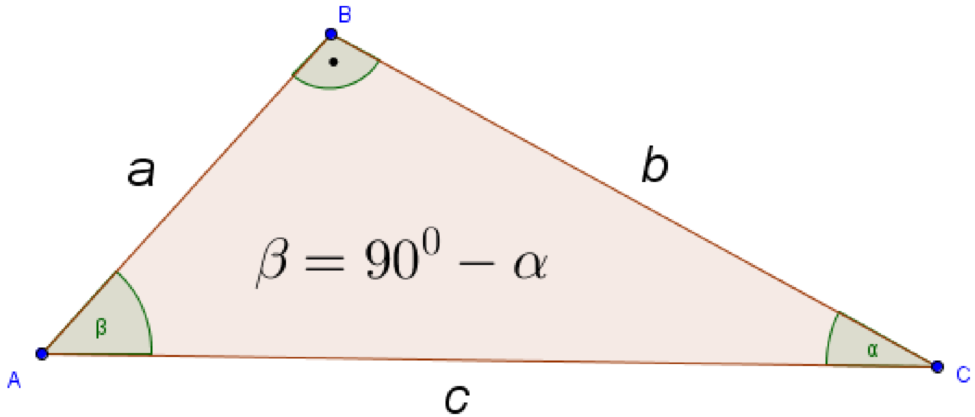
$$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$$

$$ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$$

ZWIĄZEK MIEDZY sinα i cos(90-α)

$$sin\alpha = cos\beta = cos(90^0 - \alpha)$$

$$cos\alpha = sin\beta = sin(90^0 - \alpha)$$



$$\beta = 90^0 - \alpha$$

$$tg\alpha = ctg\beta = ctg(90^0 - \alpha)$$

$$ctg\alpha = tg\beta = tg(90^0 - \alpha)$$

ZASTOSOWANIA

Mając dany sinα=¾ oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

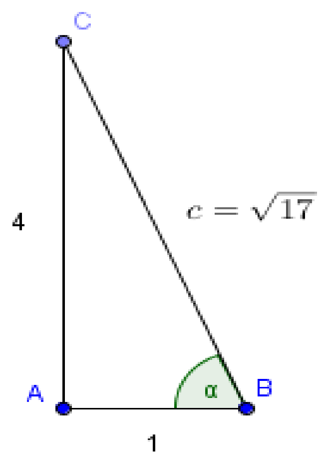
$$ctg\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

ZASTOSOWANIA

Mając dany ctgα=¼. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych dla kątaα.

$$ctg\alpha = \frac{1}{4}$$

$$tg\alpha = 4$$



$$\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17}$$

ZASTOSOWANIA

Oblicz wartość wyrażenia:

$$\frac{\sin 39^0 \cdot \cos 51^0 + \sin 51^0 \cdot \cos 39^0}{\sin 30^0 \cdot \cos 60^0}$$

$$\frac{\sin 39^0 \cdot \sin(90^0 - 51^0) + \cos(90^0 - 51^0) \cdot \cos 39^0}{\sin 30^0 \cdot \sin(90^0 - 60^0)} =$$

$$\frac{\sin 39^0 \cdot \sin 39^0 + \cos 39^0 \cdot \cos 39^0}{\sin 30^0 \cdot \sin 30^0} = \frac{\sin^2 39^0 + \cos^2 39^0}{\sin^2 30^0} =$$

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

ZASTOSOWANIA

Wiedząc, że $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ i $tg\alpha = \sqrt{15}$ oblicz wartość wyrażenia:

$$\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$\frac{\cos\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha} = ctg\alpha\cdot\cos\alpha \quad \frac{1}{\sqrt{15}}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{60}$$

ZADANIA

1. Mając dany $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α.

2. Jeżeli $tg\alpha = \frac{2}{3}$, to

$a)\ \sin\alpha = \frac{3}{2}$ $b)\ \sin\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ $c)\ \sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ $d)\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{13}}{13}$

3. Oblicz wartość wyrażenia

$$\frac{\sin 15^0 \cdot \cos 75^0 + \sin 75^0 \cdot \cos 15^0}{\cos 60^0 \cdot \sin 30^0}$$

ODPOWIEDZI

Zad. 1.

$$\cos\alpha = \frac{3}{5},\ tg\alpha = \frac{4}{3},\ ctg\alpha = \frac{3}{4}$$

Zad. 2. c.

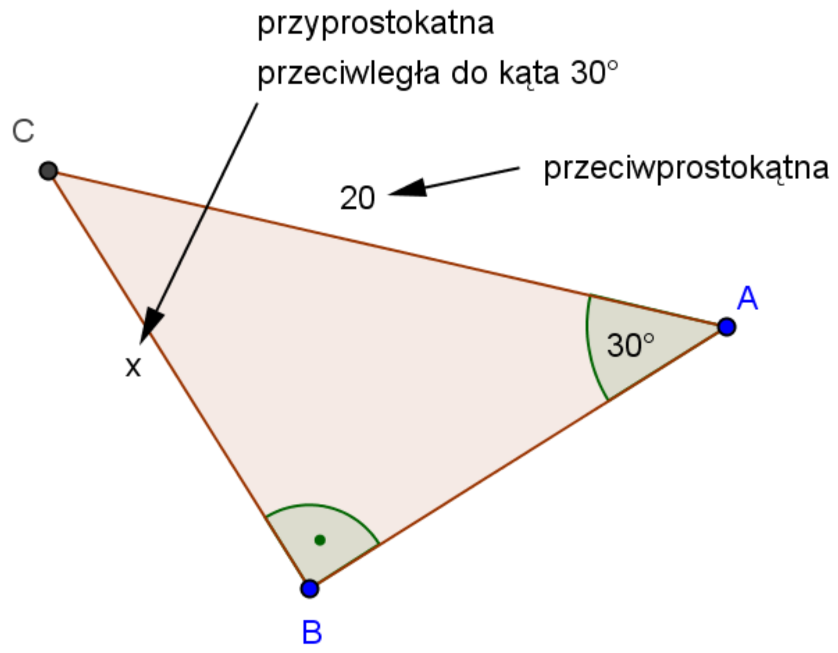
Zad. 3. $\frac{4}{3}$

WYKORZYSTANIE FUNKCJ TRYGONOMETRYCZNYCH DO ROZWIĄZYWANIA TRÓJKĄTÓW I ZAGADNIEŃ GEOMETRYCZNYCH

HARALD KAJZER – ZST NR 2 im. Mariana Batko

ZASTOSOWANIE FUNKCJI sinus

Oblicz długość boku trójkąta oznaczonego literą.



$$\sin 30^0 = \frac{x}{20}$$

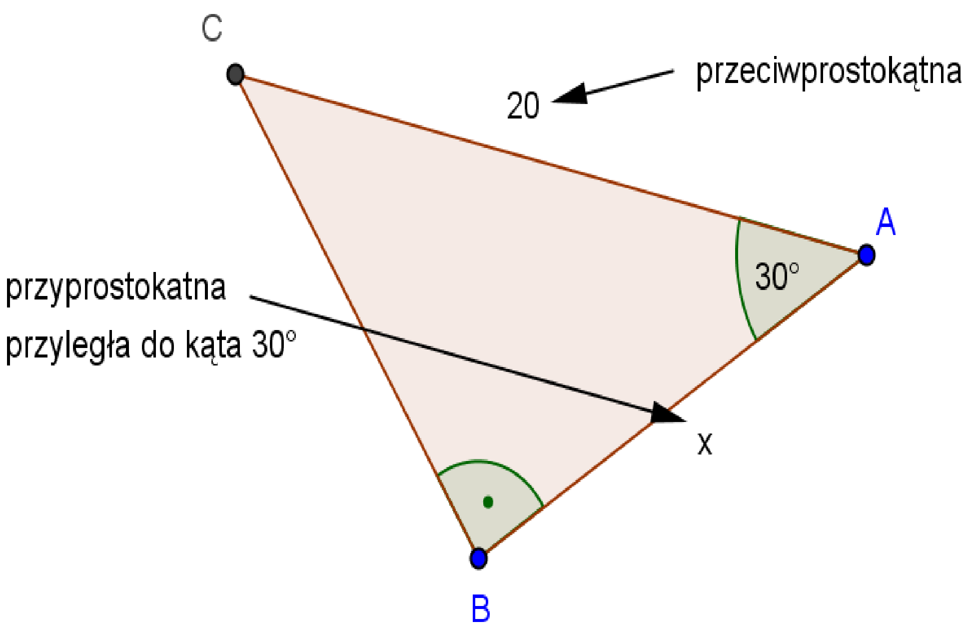
$$\frac{1}{2} = \frac{x}{20}$$

$$2x = 20 \quad / : 2$$

$$x = 10$$

ZASTOSOWANIE FUNKCJI cosinus

Oblicz długość boku trójkąta oznaczonego literą.



$$\cos 30^0 = \frac{x}{20}$$

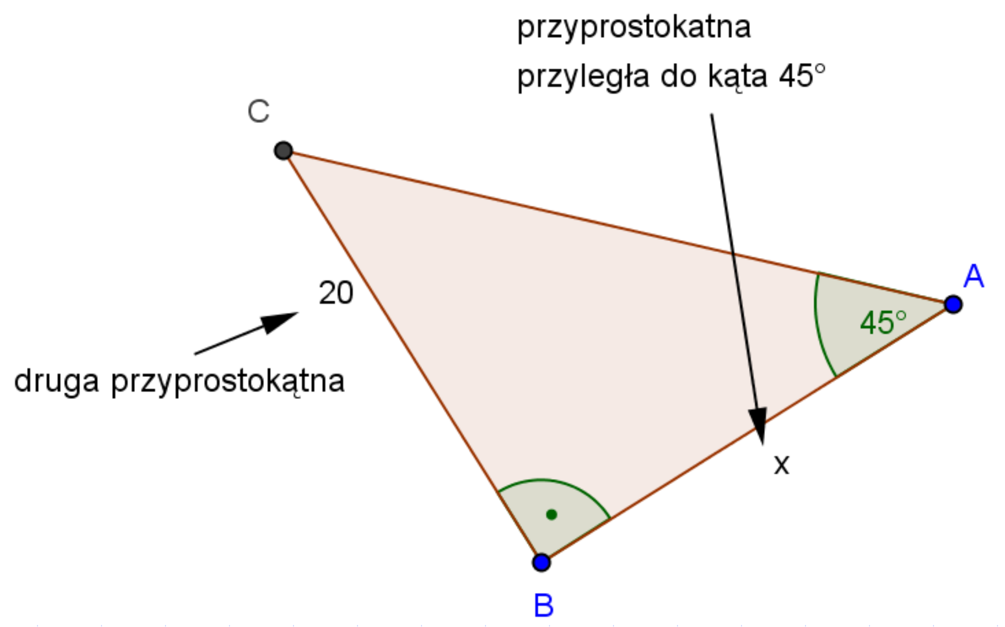
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{20}$$

$$20\sqrt{3} = 2x \quad / : 2$$

$$x = 10\sqrt{3}$$

ZASTOSOWANIE FUNKCJI tangens

Oblicz długość boku trójkąta oznaczonego literą.



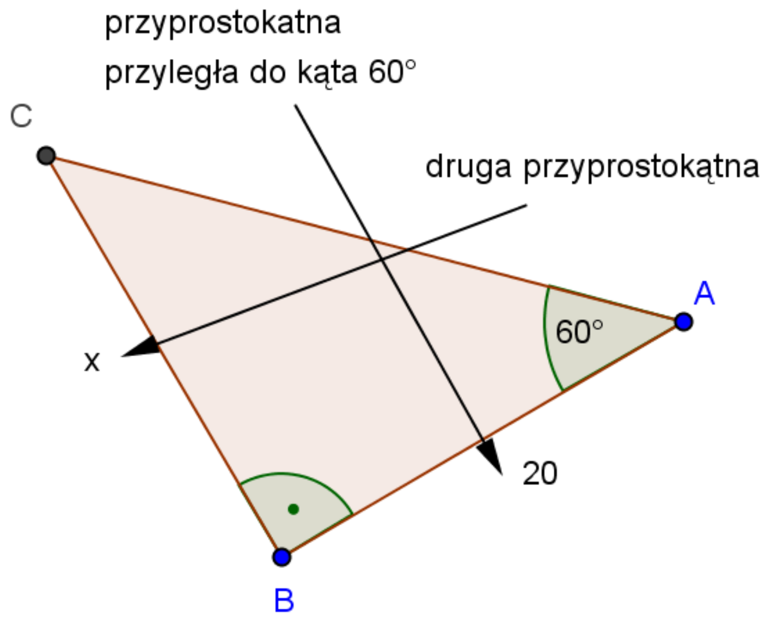
$$tg45^0 = \frac{20}{x}$$

$$1 = \frac{20}{x}$$

$$x = 20$$

ZASTOSOWANIE FUNKCJI cotangens

Oblicz długość boku trójkąta oznaczonego literą.



$$ctg60^0 = \frac{20}{x}$$

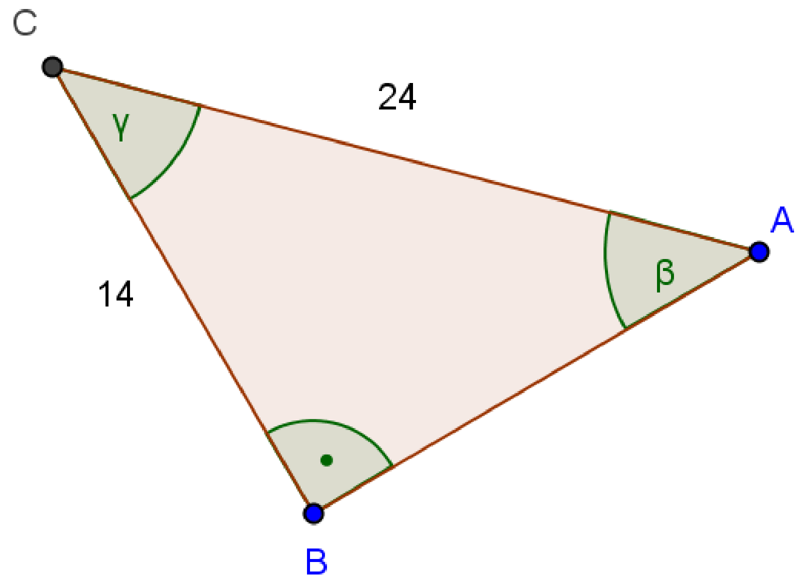
$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{20}{x}$$

$$\sqrt{3}x = 60 \ / : \sqrt{3}$$

$$x = \frac{60}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{60\sqrt{3}}{3} = 20\sqrt{3}$$

OBLICZANIE MIAR KĄTÓW TRÓJKĄTA PROSTOKATNEGO

Oblicz miary katów trójkąta.



$$\sin\beta = \cos\gamma = \frac{14}{24} = 0{,}58(3)$$

$$\beta = 36^0 \Rightarrow \gamma = 90^0 - 36^0 = 54^0$$

$$\gamma = 54^0 \Rightarrow \beta = 90^0 - 54^0 = 36^0$$

TABLICE WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH

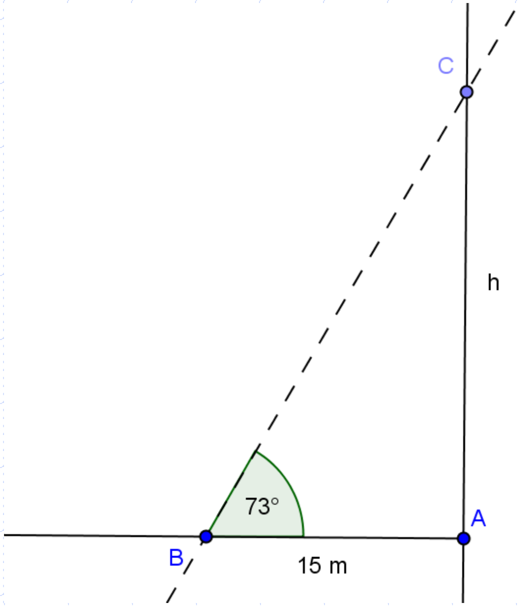
α [°]	$\sin\alpha$ $\cos\beta$	$\mathrm{tg}\,\alpha$ $\mathrm{ctg}\,\beta$	β [°]
0	0,0000	0,0000	90
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
6	0,1045	0,1051	84
7	0,1219	0,1228	83
8	0,1392	0,1405	82
9	0,1564	0,1584	81
10	0,1736	0,1763	80
11	0,1908	0,1944	79
12	0,2079	0,2126	78
13	0,2250	0,2309	77
14	0,2419	0,2493	76
15	0,2588	0,2679	75
16	0,2756	0,2867	74
17	0,2924	0,3057	73
18	0,3090	0,3249	72
19	0,3256	0,3443	71
20	0,3420	0,3640	70
21	0,3584	0,3839	69
22	0,3746	0,4040	68
23	0,3907	0,4245	67
24	0,4067	0,4452	66
25	0,4226	0,4663	65
26	0,4384	0,4877	64
27	0,4540	0,5095	63
28	0,4695	0,5317	62
29	0,4848	0,5543	61
30	0,5000	0,5774	60
31	0,5150	0,6009	59
32	0,5299	0,6249	58
33	0,5446	0,6494	57
34	0,5592	0,6745	56
35	0,5736	0,7002	55
36	0,5878	0,7265	54
37	0,6018	0,7536	53
38	0,6157	0,7813	52

ODCZYTANIE KĄTA

31	0,5150	0,6009	59
32	0,5299	0,6249	58
33	0,5446	0.6494	57
34	0.5592	0.6745	56
35	0,5736	0.7002	55
36	0,5878	0,7265	54
37	0,6018	0,7536	53
38	0,6157	0,7813	52
39	0,6293	0,8098	51

PRAKTYCZNE ZASTOSOWANIA

Oblicz wysokość budynku, jeżeli promienie słoneczne padają pod katem 73°, a budynek rzuca cień długości 15 m.



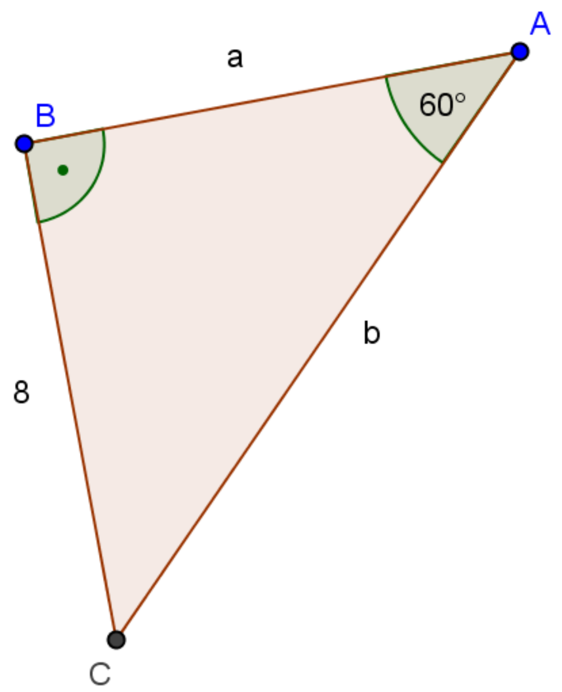
$$tg73^0 = \frac{h}{15m} \quad /\cdot 15$$

$$15m \cdot tg73^0 = h$$

$$15 \cdot 3{,}2709 \approx 49m$$

ZADANIA

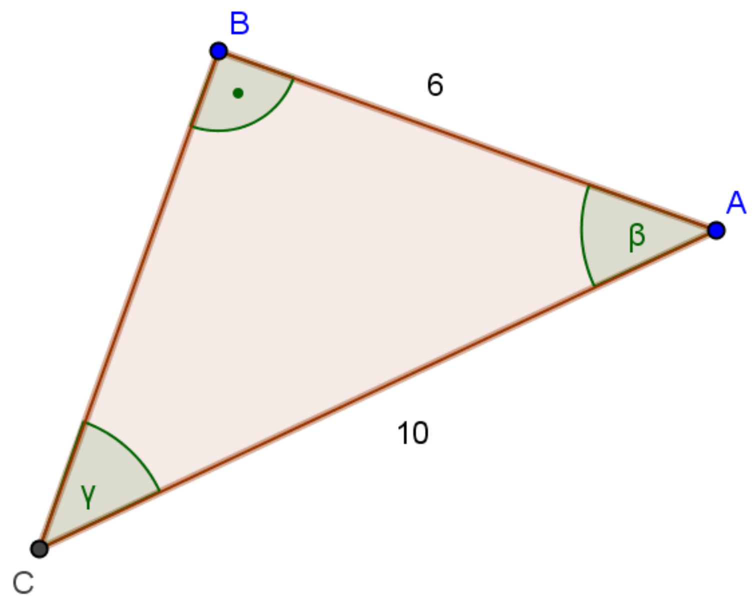
Oblicz długości boków trójkąta.



ODPOWIEDŹ

ZADANIA

Oblicz miary katów trójkąta.



ODPOWIEDŻ

ZADANIA

Dolna stacja kolejki linowej znajduje się na wysokości 450 mnp. Trasa kolejki wznosi się od poziomu pod katem 11^{o} i pokonuje trasę 3 km. Na jaką wysokość wyjadą pasażerowie kolejki?

ODPOWIEDŹ

ODPOWIEDZI

SLAJD NR 10

$$a = \frac{8\sqrt{3}}{3},\ b = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

POWRÓT

SLAJD 11

$$\cos\beta = \frac{6}{10} = 0{,}6 \Rightarrow \beta \approx 53^0,\ \ \gamma = 37^0$$

POWRÓT

SLAJD 12

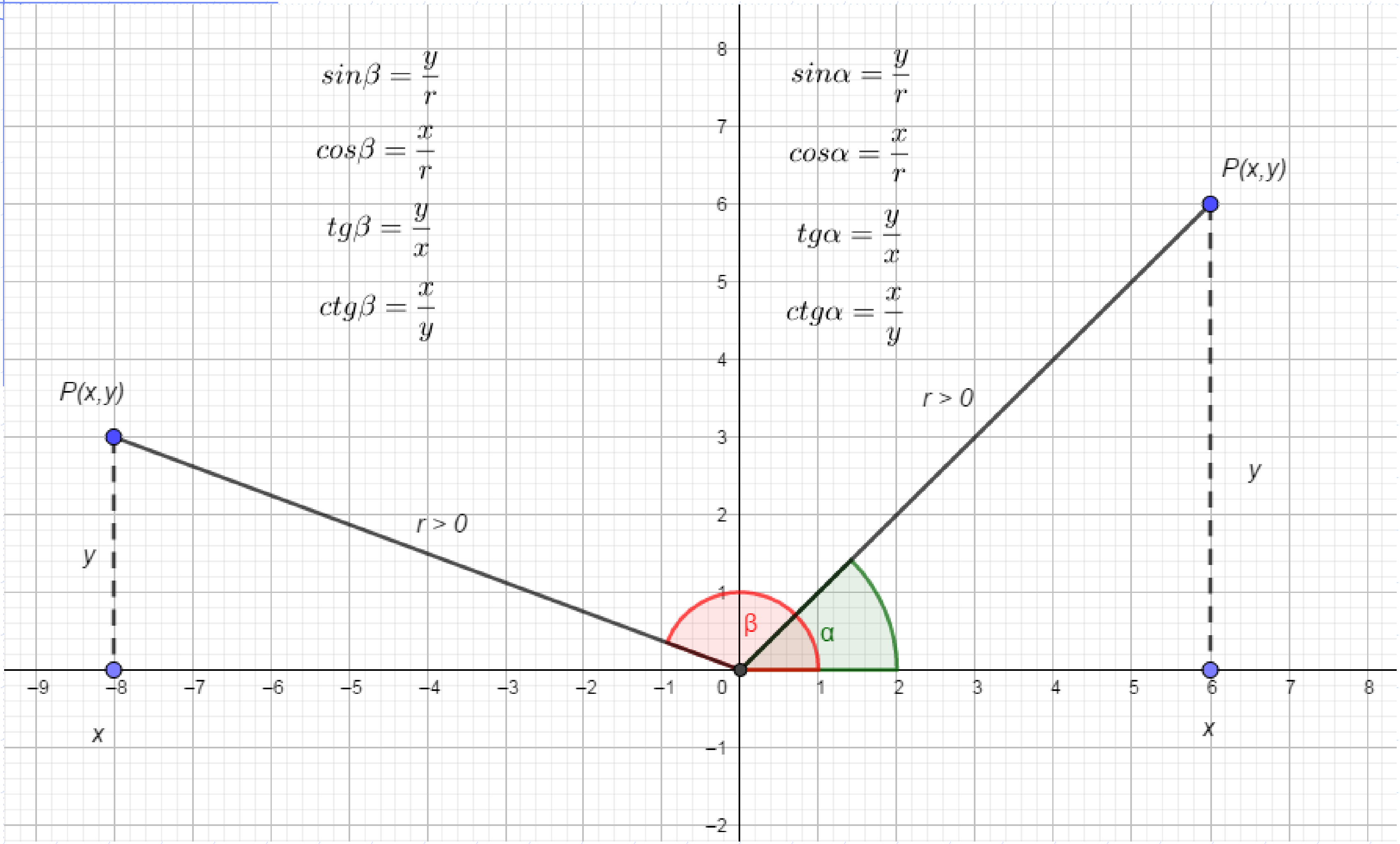
różnica wzniesień 575,4 m

POWRÓT

Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej

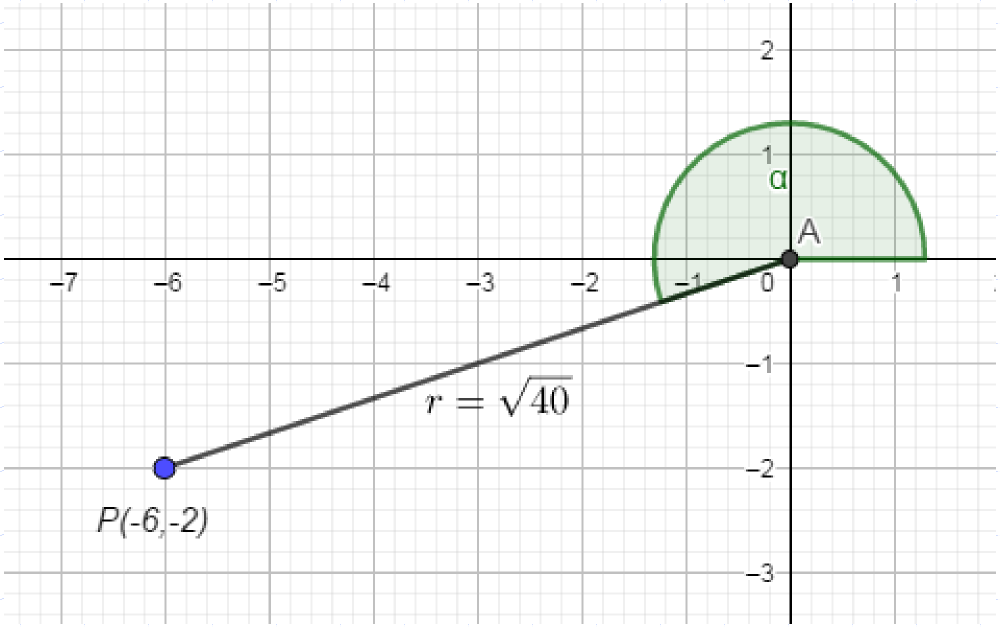
HARALD KAJZER – ZST NR 2 im. Mariana Batko

Koło trygonometryczne



Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

Dzięki zdefiniowaniu funkcji trygonometrycznych w układzie współrzędnych możemy posługiwać się funkcjami trygonometrycznymi dla dowolnie dużych kątów np.



$$\sin\alpha = \frac{-2}{\sqrt{40}}$$

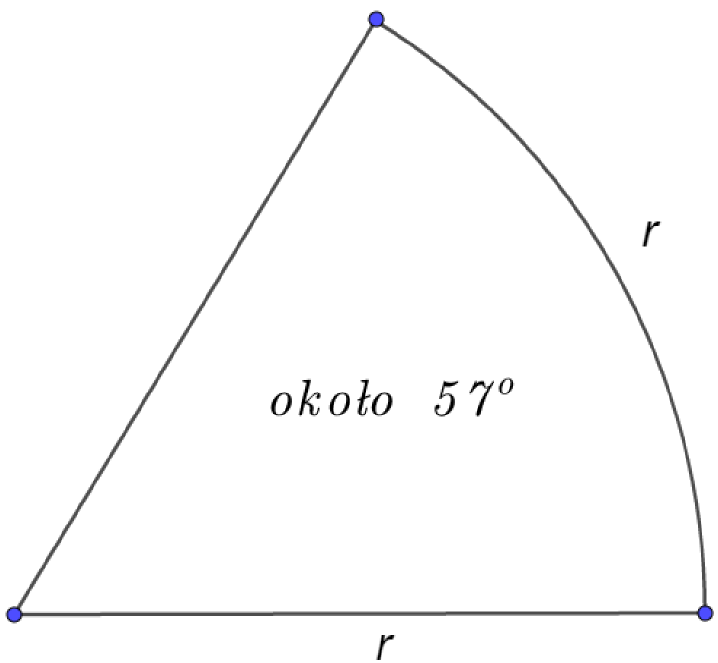
$$\cos\alpha = \frac{-6}{\sqrt{40}}$$

$$tg\alpha = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

$$ctg\alpha = \frac{-6}{-2} = 3$$

Miara łukowa kąta

Jednostką miary łukowej jest radian, miarę 1 radiana maja kąty, w których promień o długości 1m zakreśli łuk o tej samej długości.



$$360^o = 2\pi \, rad$$

$$180^o = \pi \, rad$$

$$90^o = \frac{\pi}{2} rad$$

$$45^o = \frac{\pi}{4} rad$$

$$\boxed{\alpha^o \cdot \frac{\pi}{180^o} = x \, rad}$$

Zamiana miary łukowej na stopniową

$$x\,rad\cdot\frac{180^o}{\pi}=\alpha^o$$

$$\frac{2}{\cancel{3}}\cancel{\pi}\,rad\cdot\frac{\cancel{180^o}}{\cancel{\pi}}=\ 2\cdot 60^o=120^o$$

$$\frac{11}{\cancel{6}}\cancel{\pi}\,rad\cdot\frac{\cancel{180^o}}{\cancel{\pi}}=11\cdot 30^o=330^o$$

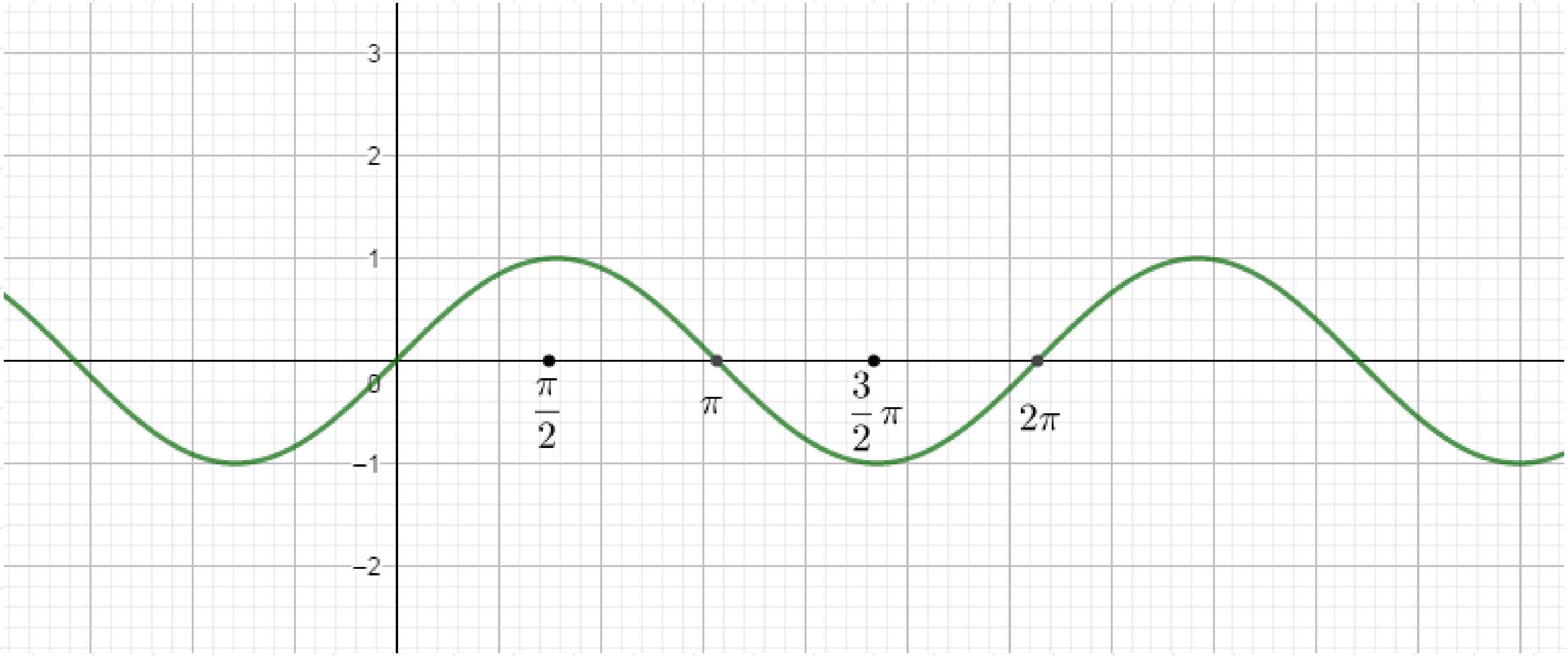
Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej

Miara łukowa jako długość jest liczbą rzeczywistą implikuje to możliwość zdefiniowania funkcji trygonometrycznych dla, których argumentami są liczby rzeczywiste, a nie kąty wyrażone w stopniach.

$$\sin : R \to < -1;1 > \qquad tg : R \setminus \{\frac{(2k-1)\pi}{2} : k \in C\} \to R$$

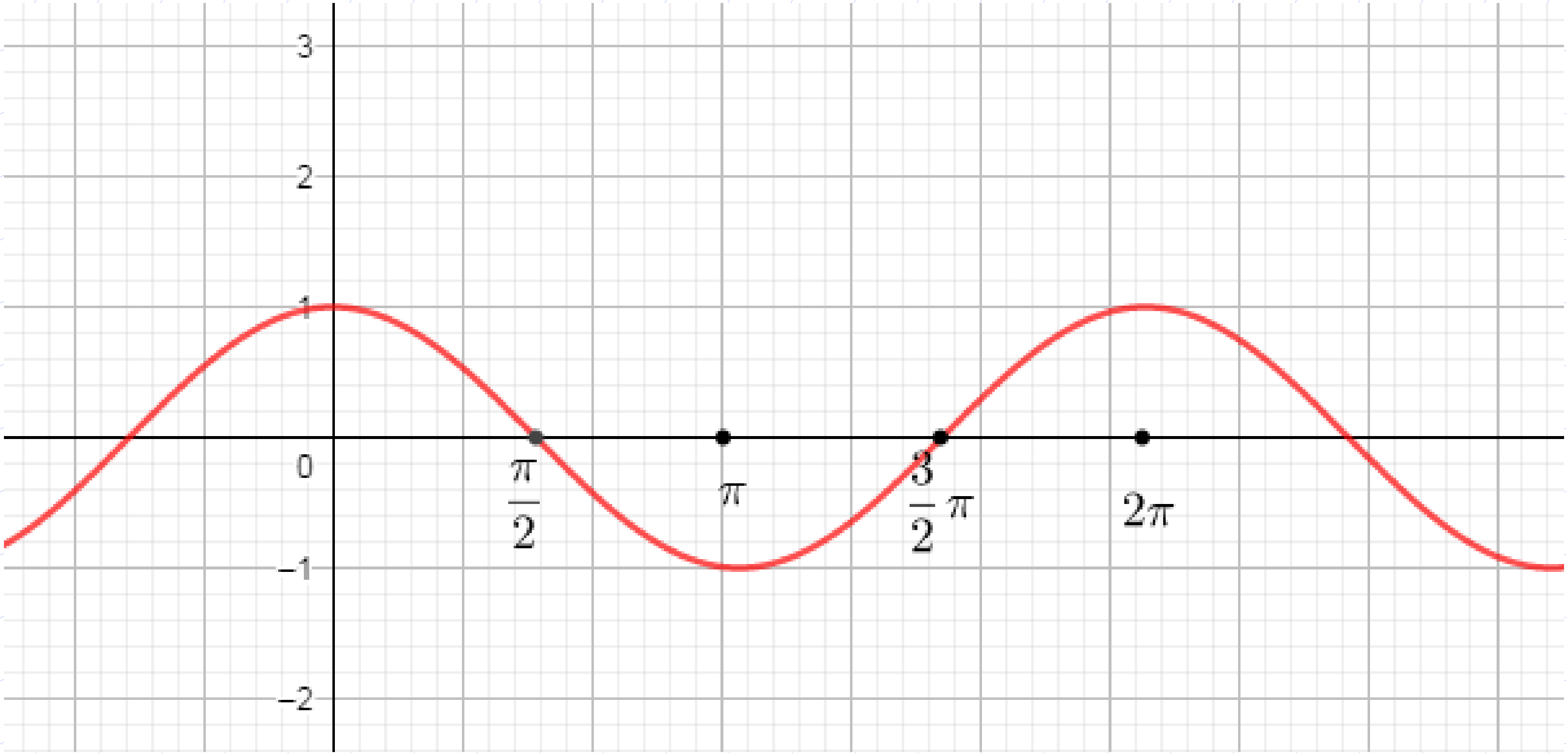
$$\cos : R \to < -1;1 > \qquad ctg : R \setminus \{k\pi : k \in C\} \to R$$

Wykres funkcji $y = sinx$



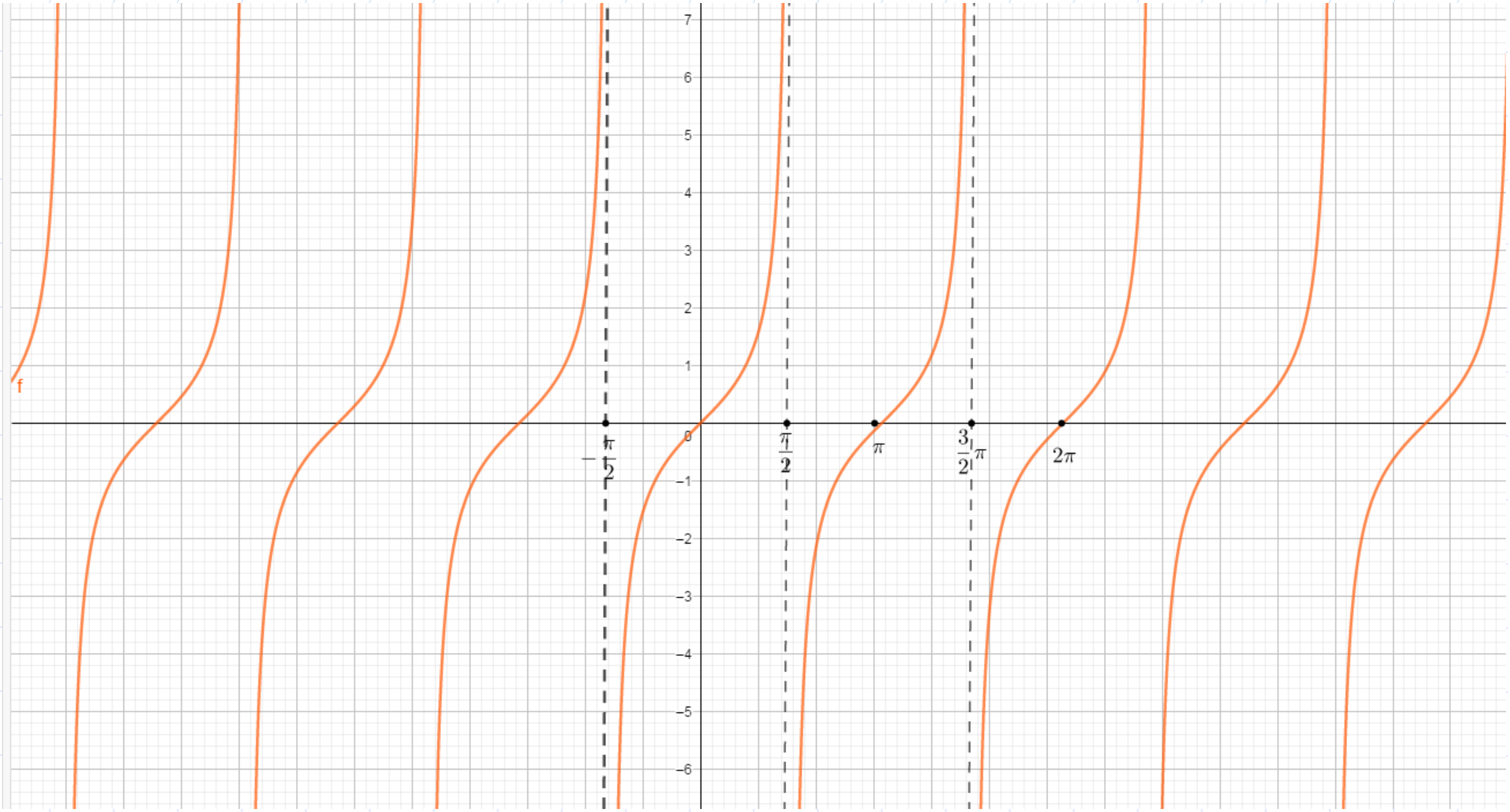
$y=sinx$ jest funkcją okresową o okresie podstawowym 2π

Wykres funkcji *y* = *cosx*



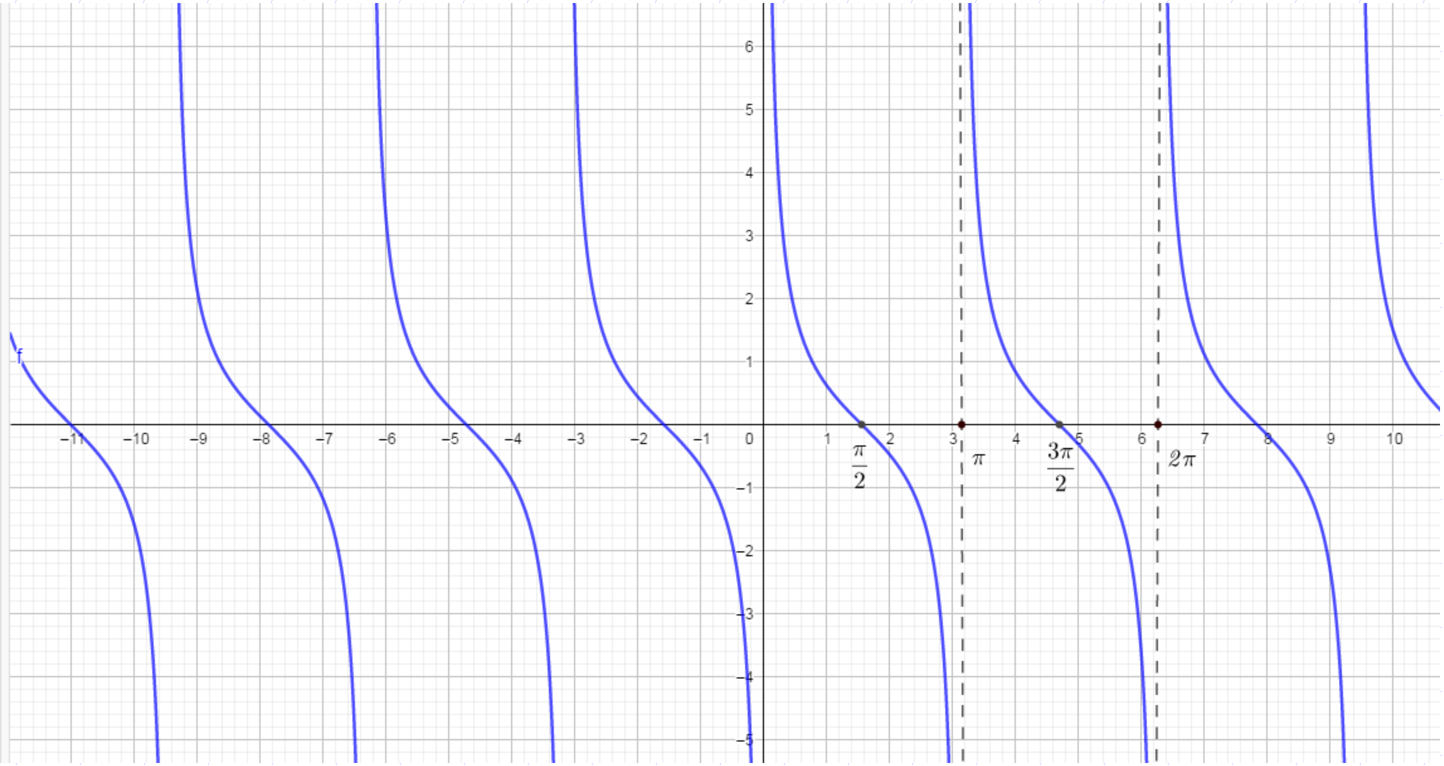
y=cosx jest funkcją okresową o okresie podstawowym 2π

Wykres funkcji *y* = *tgx*



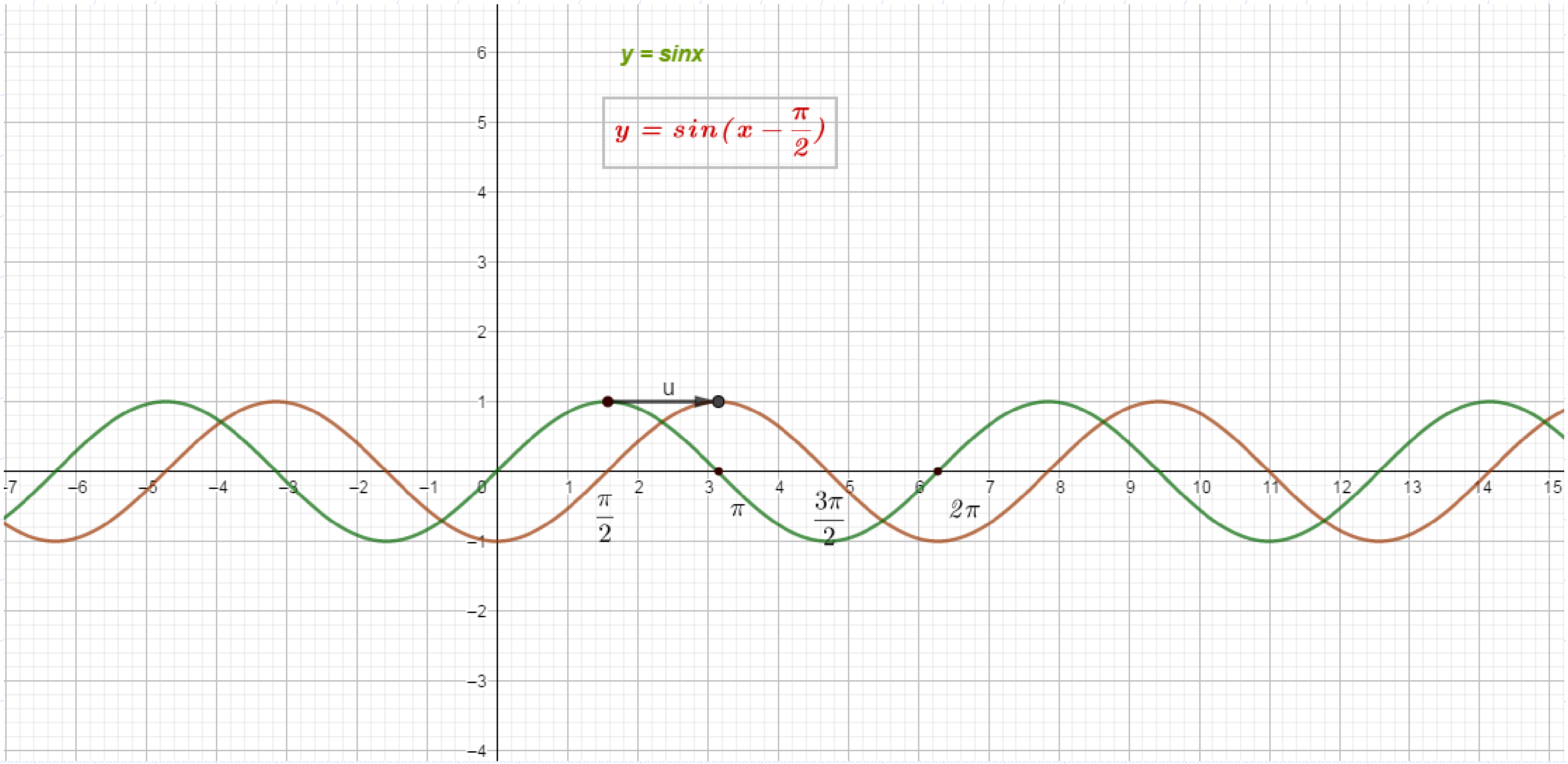
y=tgx jest funkcją okresową o okresie podstawowym π

Wykres funkcji *y* = *ctgx*

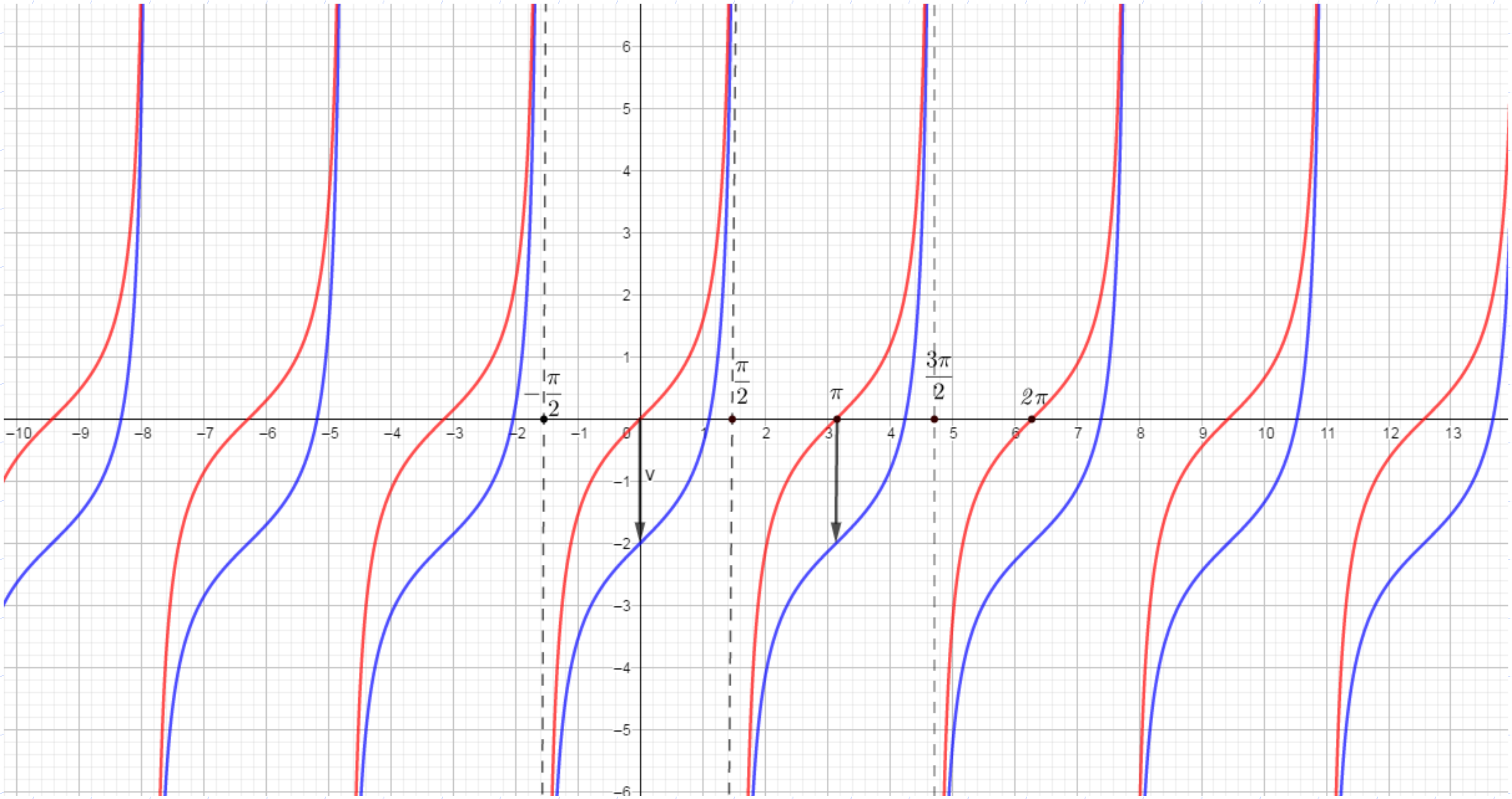


y=ctgx jest funkcją okresową o okresie podstawowym π

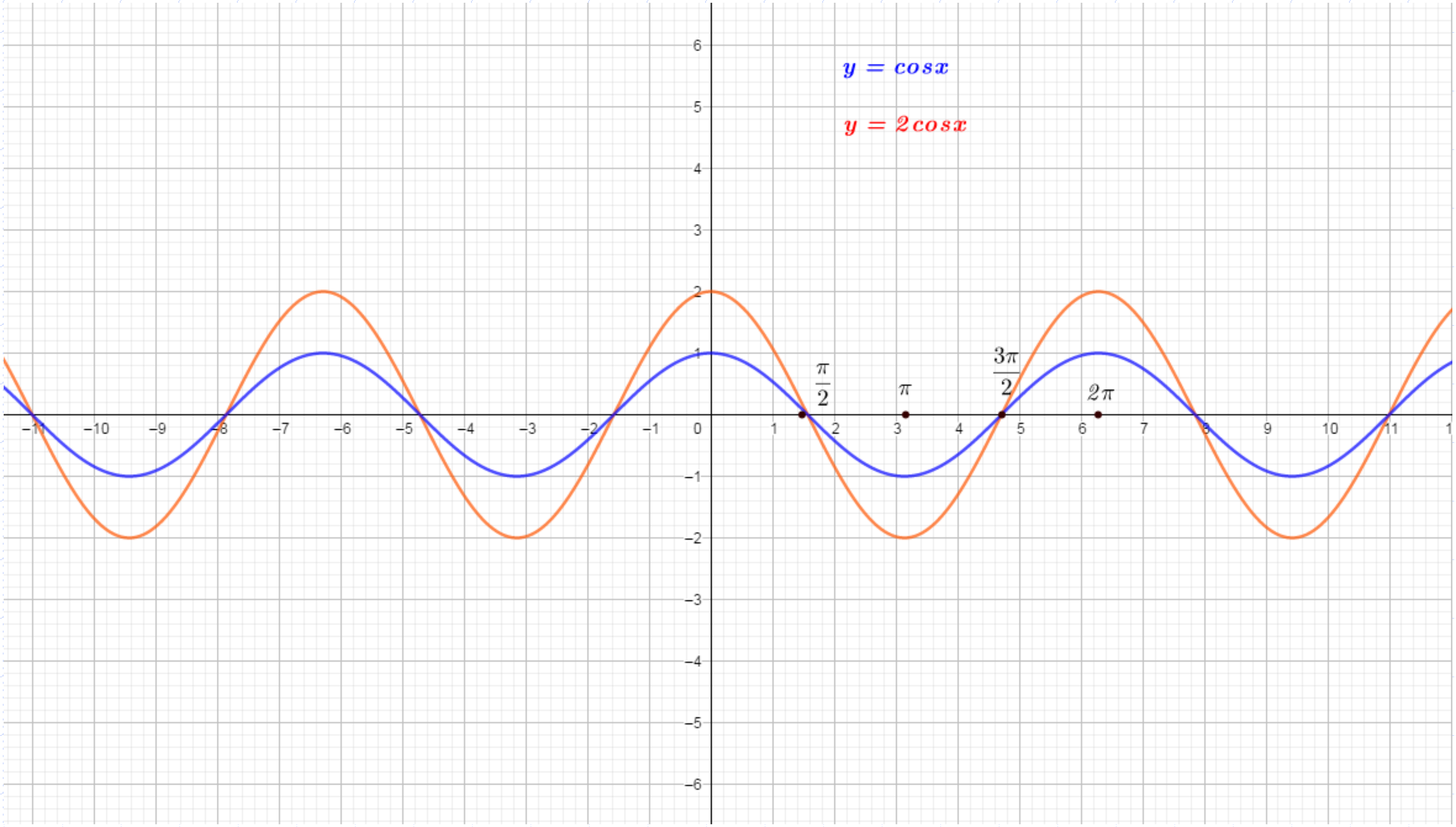
Przesunięcie wykresu funkcji trygonometrycznej o wektor poziomy $\vec{u} = \left[\frac{\pi}{2}, 0\right]$



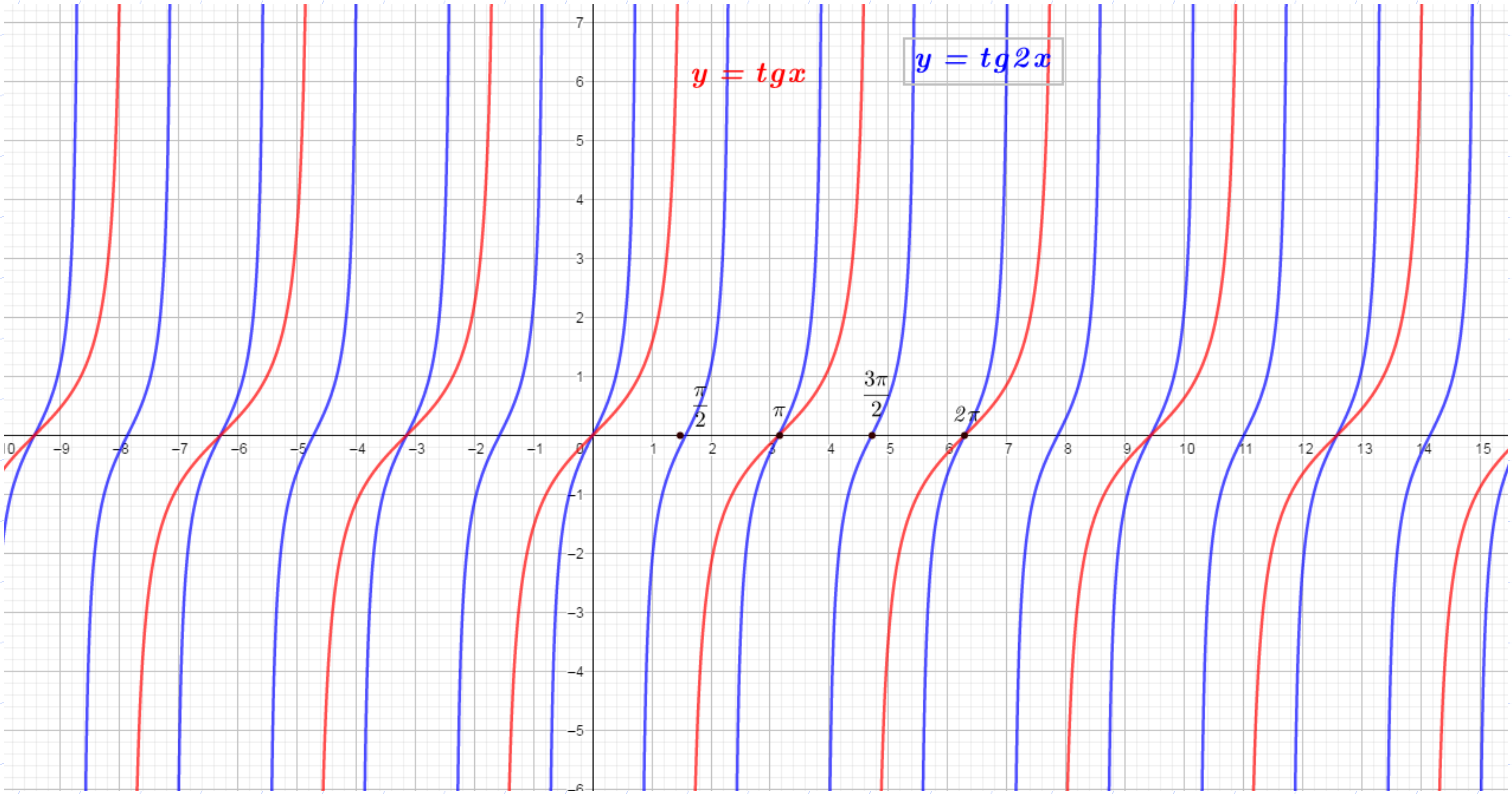
Przesunięcie wykresu funkcji trygonometrycznej o wektor pionowy $\vec{u} = [0, -2]$



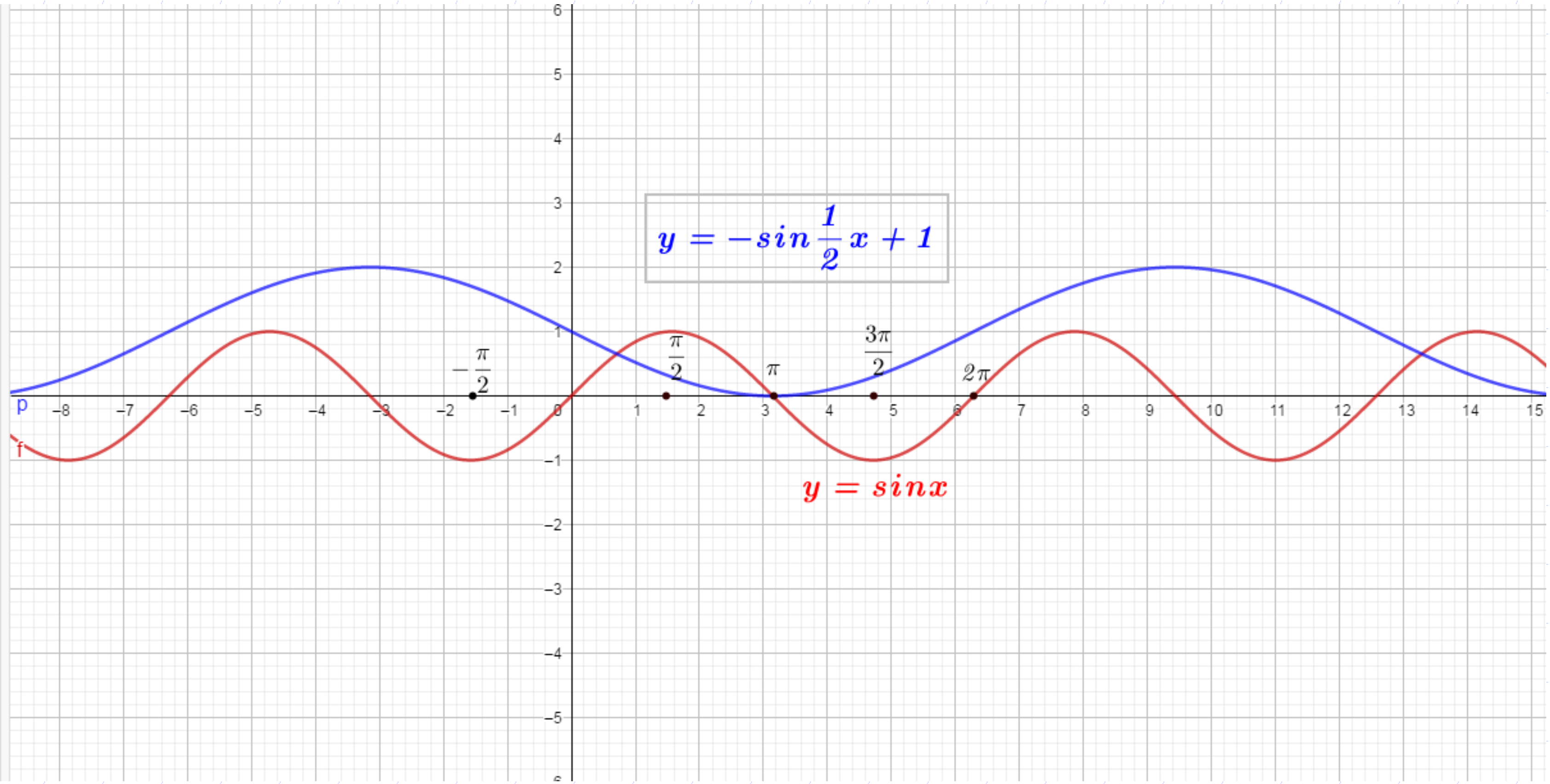
Zmiana amplitudy wykresu funkcji trygonometrycznej



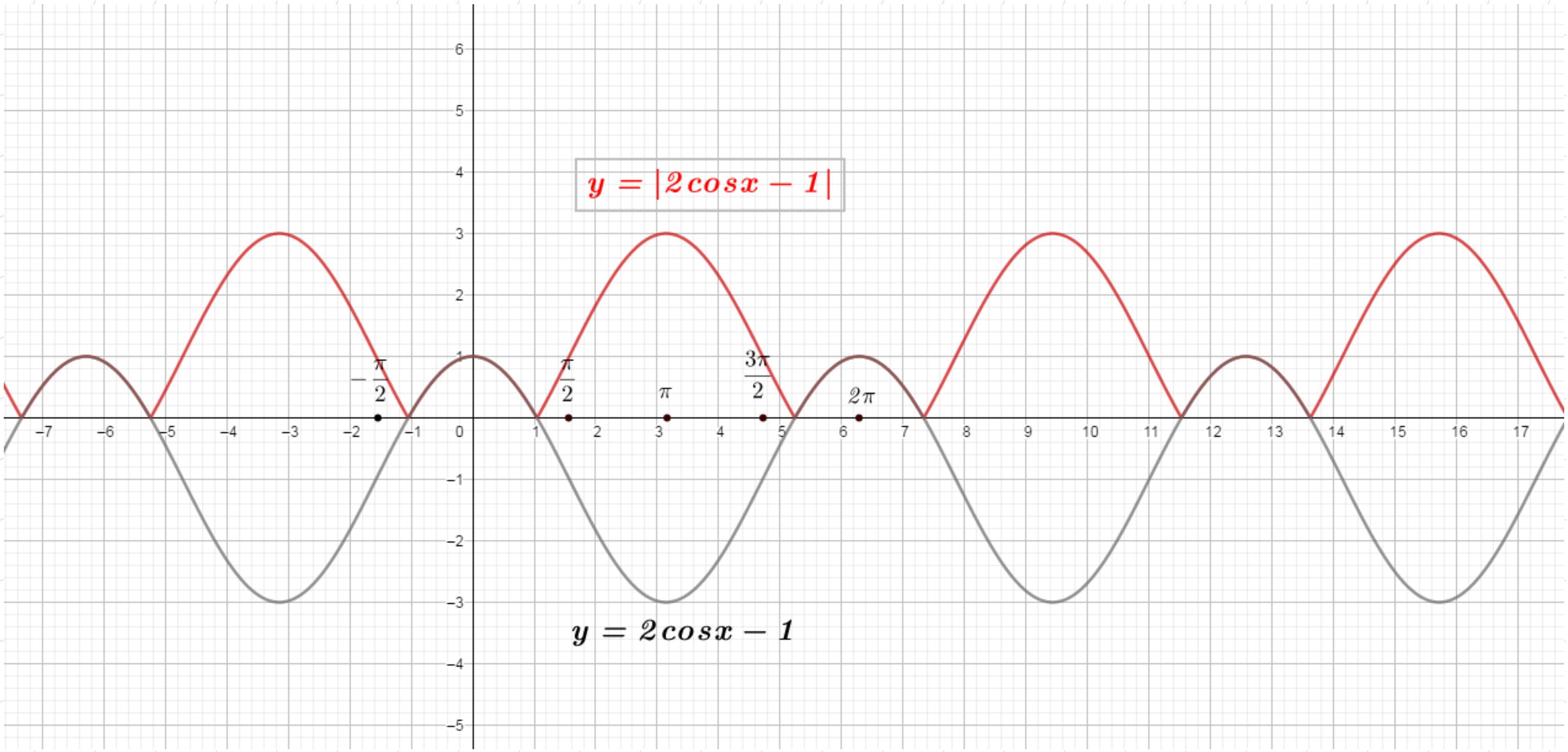
Zmiana częstotliwości wykresu funkcji trygonometrycznej



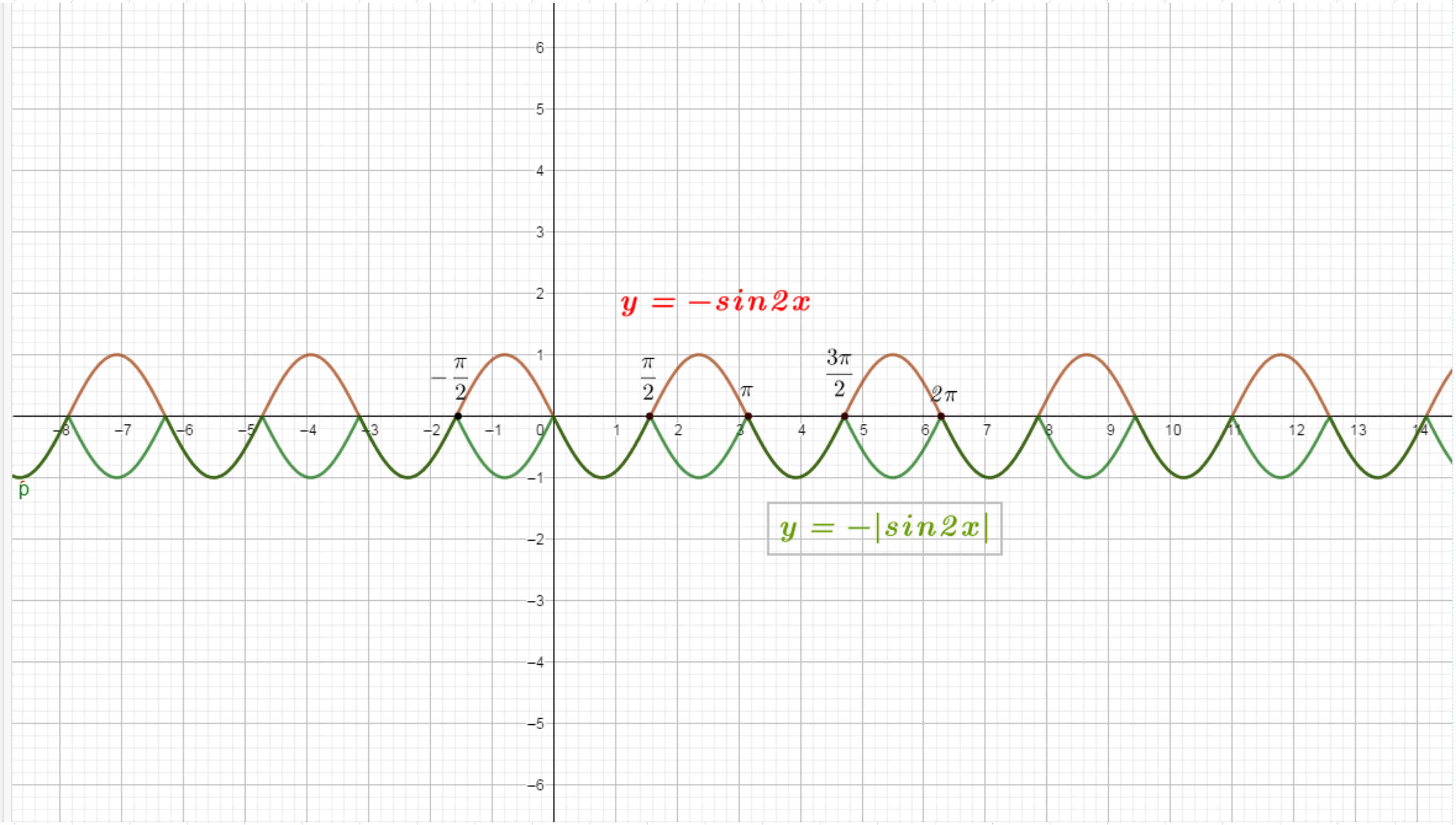
Przykład: $y = -\sin\frac{1}{2}x + 1$



Przykład: $y = |2\cos x - 1|$



Przykład: $y = -|\sin 2x|$

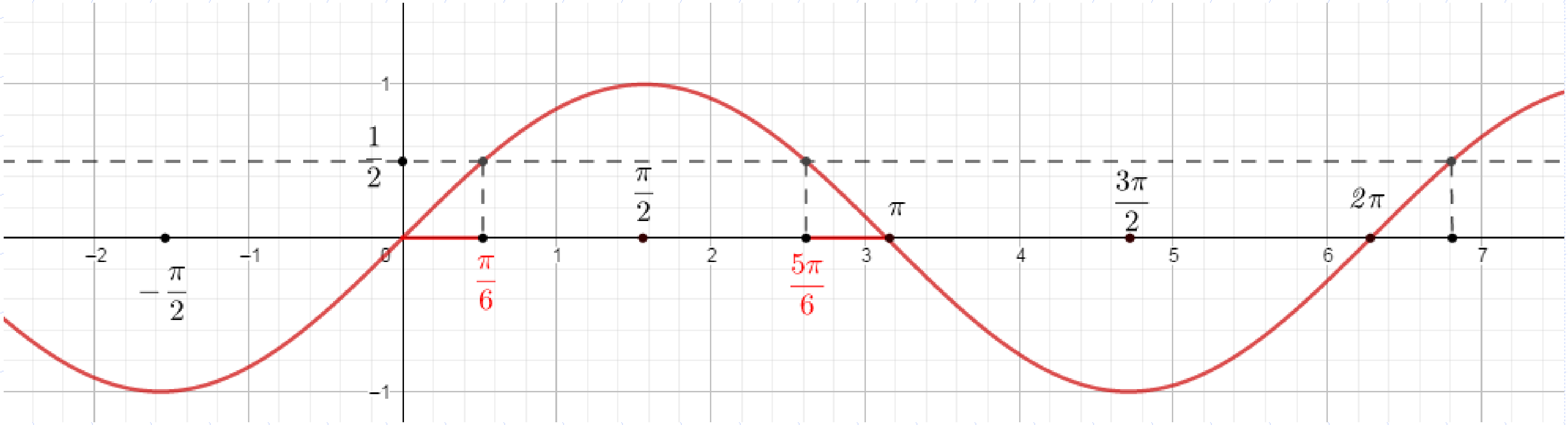


Równania trygonometryczne

HARALD KAJZER – ZST NR 2 im. Mariana Batko

Rozwiąż równanie $2\sin x = 1$

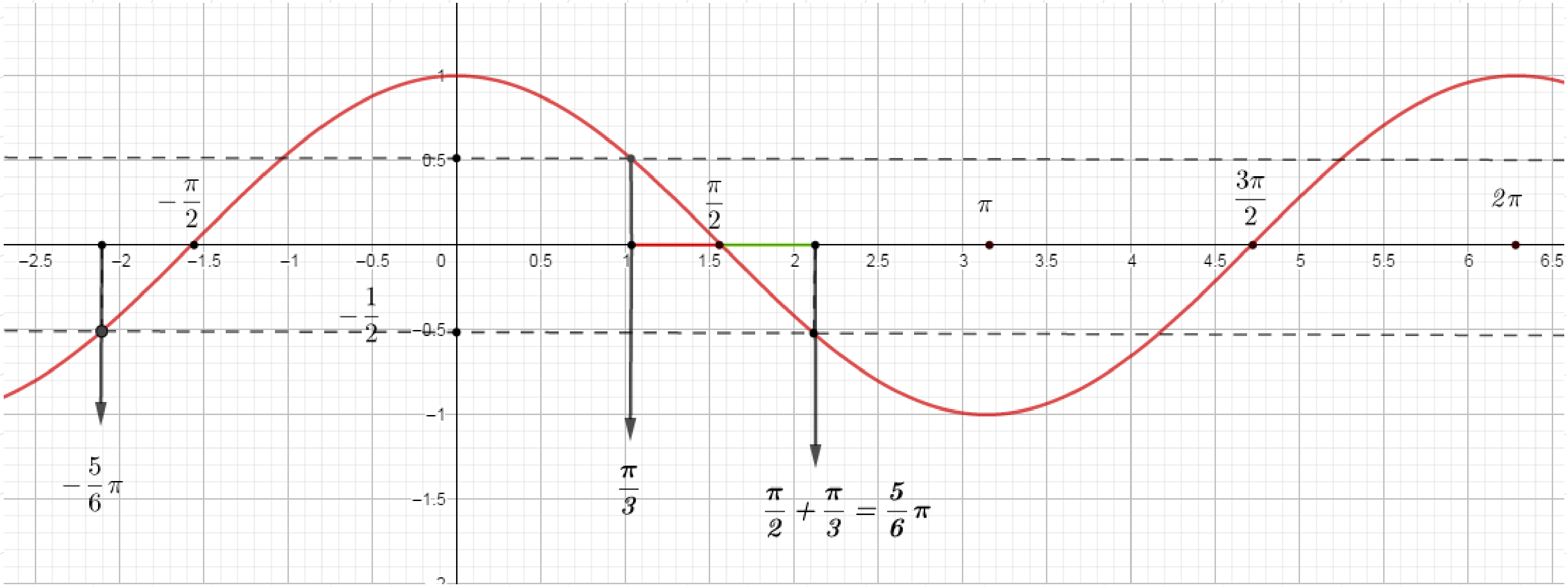
$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \quad \text{lub } x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$$



$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\; i \;\; x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in C$$

Rozwiąż równanie $2\cos x = -1$

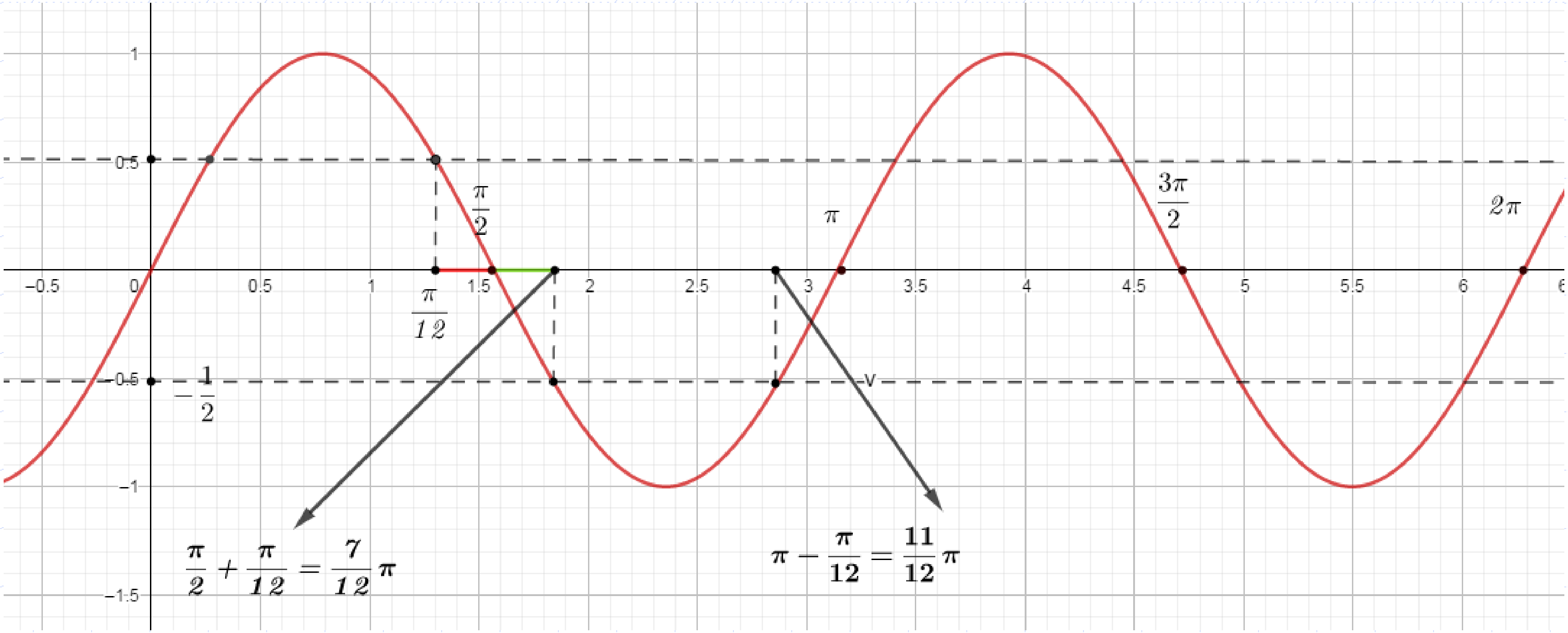
$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{6}\pi \text{ lub } x = -\frac{5}{6}\pi$$



$$x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \text{ lub } x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad k \in C$$

Rozwiąż równanie $-2\sin 2x = 1$

$$\sin 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \frac{7}{6}\pi \text{ lub } 2x = \frac{11}{6}\pi \Rightarrow x = \frac{7}{12}\pi \text{ lub } x = \frac{11}{12}\pi$$



$$x = \frac{7}{12}\pi + k\pi \text{ lub } x = \frac{11}{12}\pi + k\pi \; k \in C$$

Rozwiąż równanie

$$6\cos^2 x - 5\sin x - 2 = 0 \; dla \; x \in < 0; 2\pi > .$$

$$6\cos^2 x - 5\sin x - 2 = 0 \qquad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$6(1 - \sin^2 x) - 5\sin x - 2 = 0$$

$$6 - 6\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0 \qquad \sin x = y$$

$$-6y^2 - 5y + 4 = 0$$

$$\Delta = 121 \quad y_1 = \frac{5+11}{-12} = \cancel{-\frac{16}{12}} < -1 \quad y_2 = \frac{5-11}{-12} = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ lub } x = \frac{5\pi}{6}$$

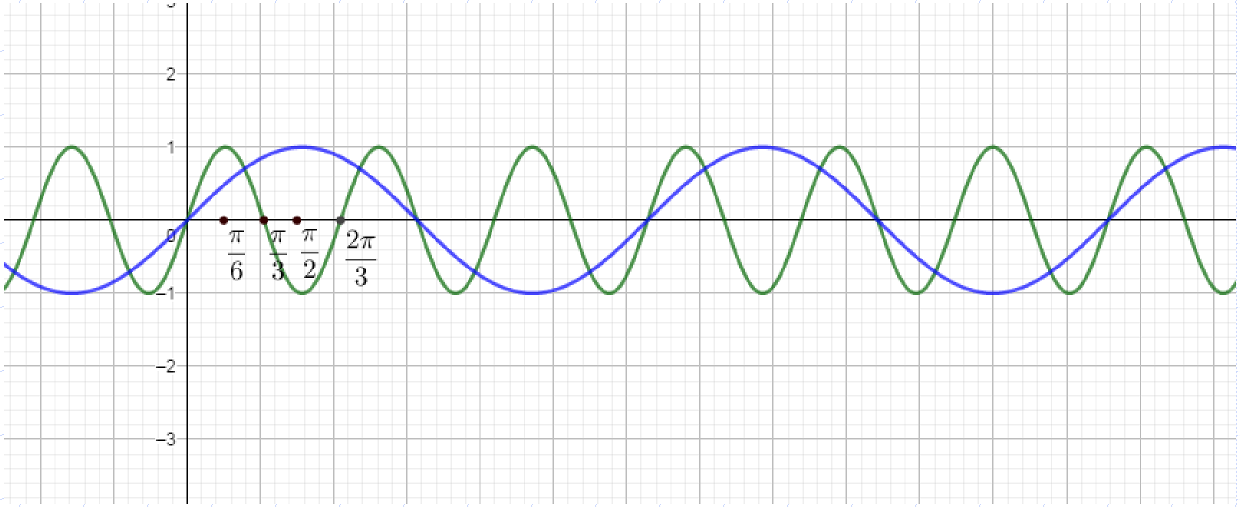
$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad k \in C$$

Rozwiąż równanie

$$\sin 3x = 1$$

$$3x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$okres\ podstawowy\ \ funkcji\ y = \sin 3x \quad to \quad \frac{2\pi}{3}$$



$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \quad k \in C$$

Zadania

Rozwiąż równania:

$$\sin(4x + \frac{\pi}{2}) = 1;$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$2\sin^2 x - 3\sin x = -1.$$

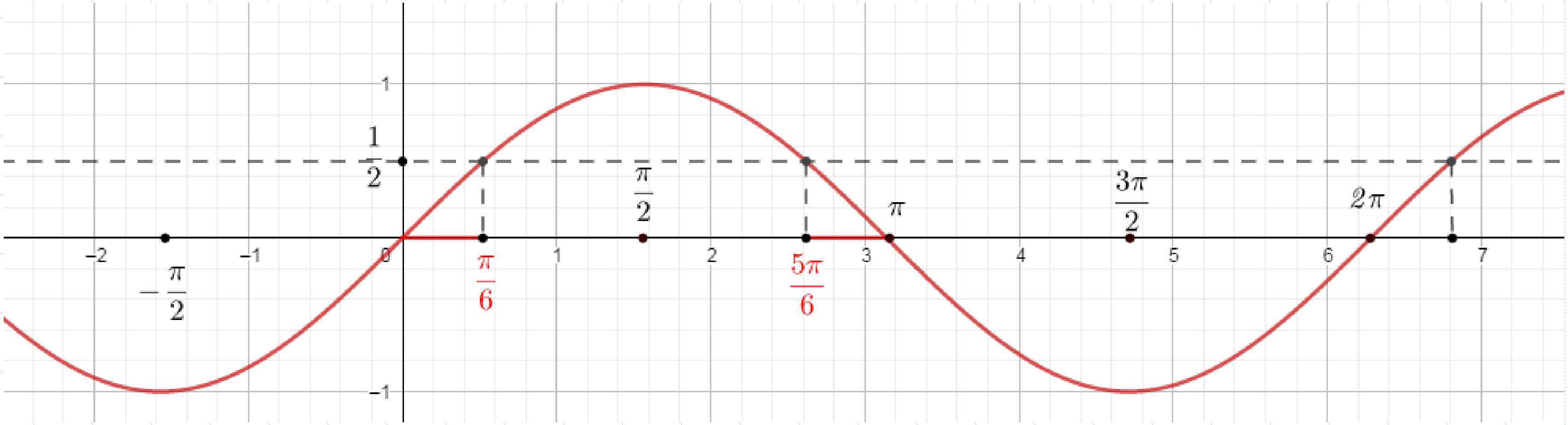
Nierówności trygonometryczne

HARALD KAJZER – ZST NR 2 im. Mariana Batko

Rozwiąż nierówność w przedziale <0; 2π>

$$2\sin x > 1$$

$$\sin x > \frac{1}{2}$$



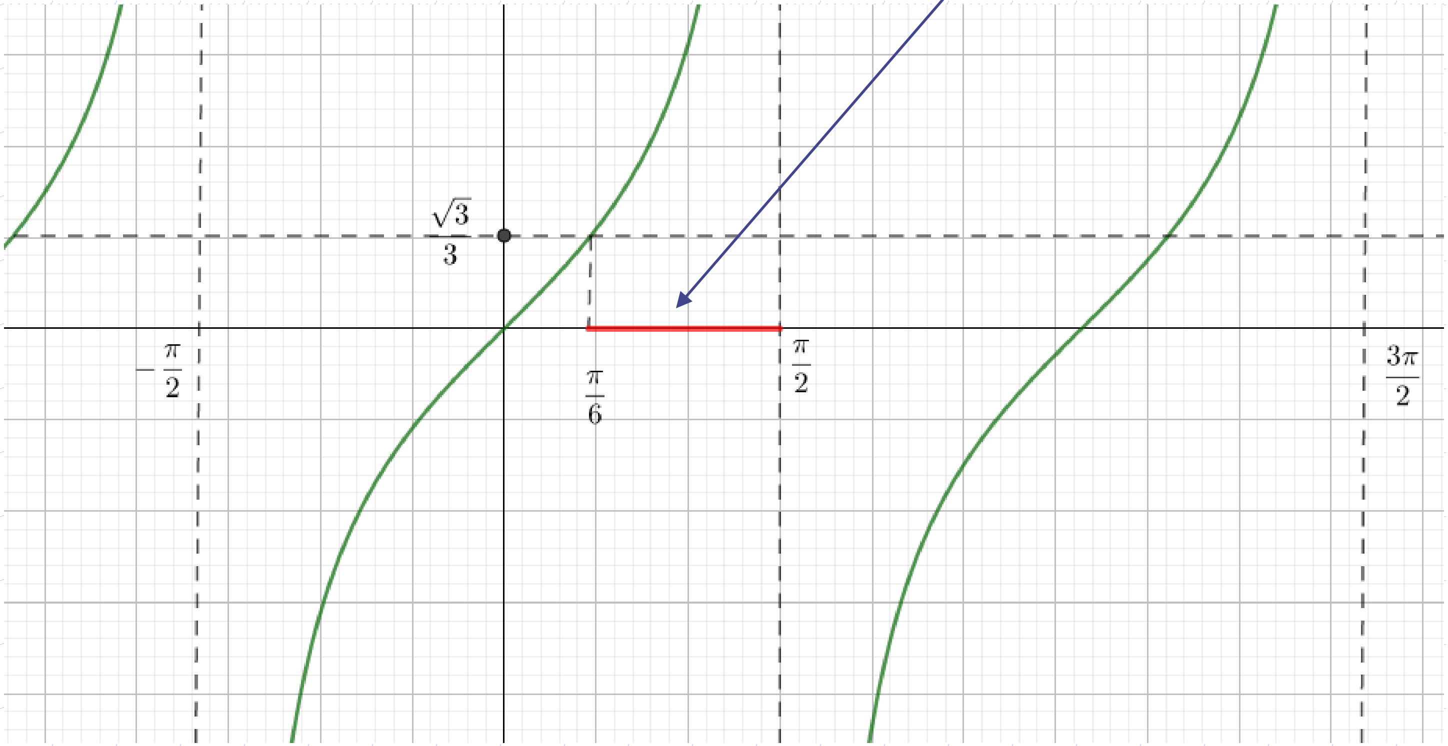
$$x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$$

Rozwiąż nierówność

$$\sqrt{3}tgx \geq 1 \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$$

$$tgx \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x \geq \frac{\pi}{6}$$

$$x \in \left\langle \frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$$



Rozwiąż nierówność

$$3\sin x + 2\cos^2 x > 3$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$3\sin x + 2(1 - \sin^2 x) > 3$$

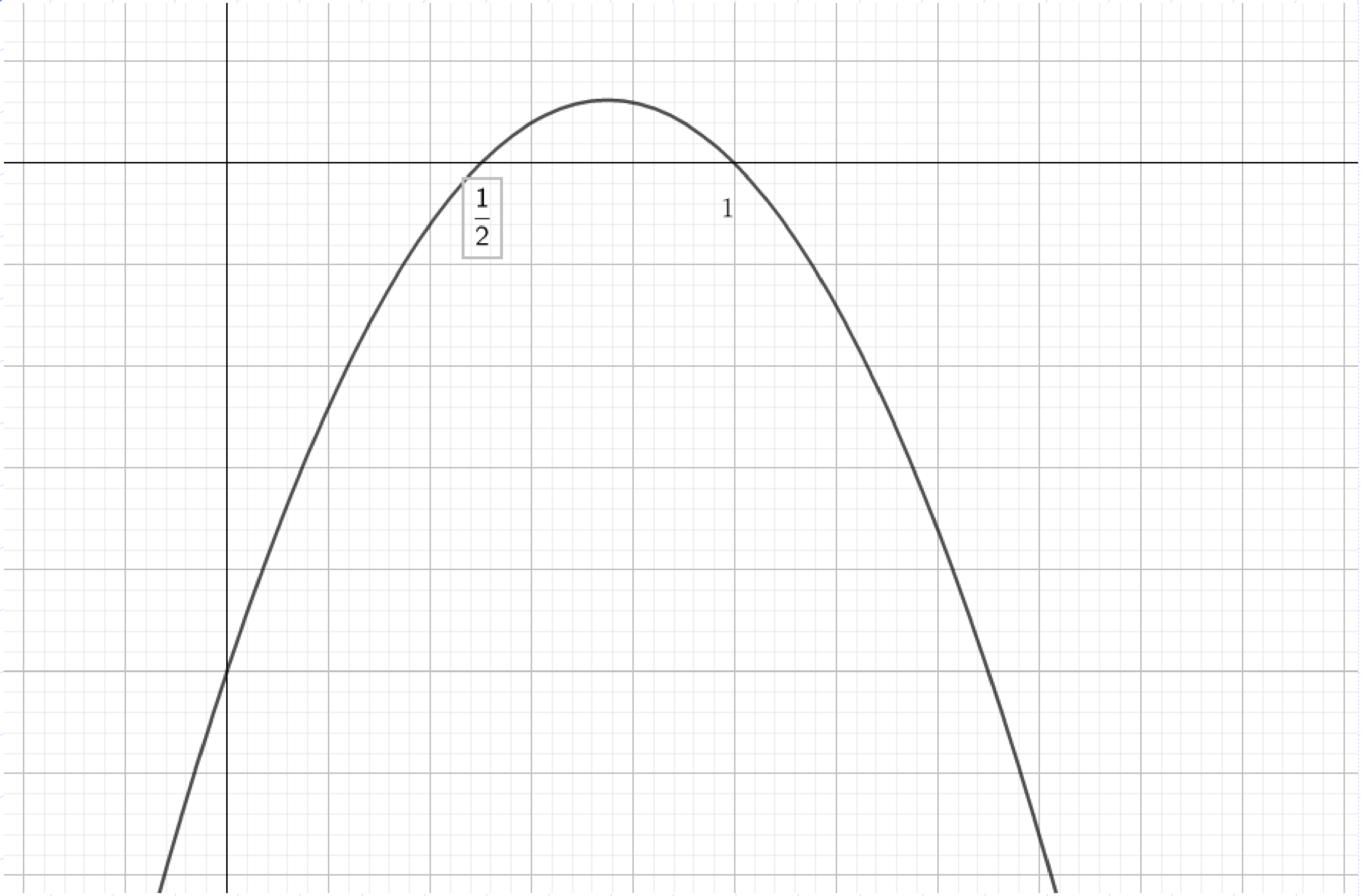
$$3\sin x + 2 - 2\sin^2 x > 3$$

$$-2\sin^2 x + 3\sin x - 1 > 0 \qquad \sin x = y$$

$$-2y^2 + 3y - 1 > 0 \quad \Delta = 1 \quad y_1 = \frac{-3-1}{-4} = 1 \; y_2 = \frac{-3+1}{-4} = \frac{1}{2}$$

Rozwiąż nierówność

$$3\sin x + 2\cos^2 x > 3$$



$$y \in \left(\frac{1}{2};1\right)$$

Rozwiąż nierówność

$$3\sin x + 2\cos^2 x > 3$$

$$\sin x \in \left(\frac{1}{2};1\right) \Rightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right)$$