



# KOMBINATORYKA

HARALD KAJZER ZST nr 2 im. Mariana Batko

# ZASADA MNOŻENIA

ZAŁÓŻMY, ŻE WYNIK JAKIEGOŚ DZIAŁANIA ZALEŻY OD KOLEJNO PODEJMOWANYCH DECYZJI. PRZY PODEJMOWANIU PIERWSZEJ MAMY  $n_1$  MOŻLIWOŚCI, DRUGIEJ  $n_2$  ITD., A PRZY OSTATNIEJ  $n_k$  MOŻLIWOŚCI, LICZBA RÓŻNYCH WYNIKÓW, KTÓRE MOŻEMY OTRZYMAĆ WYNOŚI:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$$

# PERMUTACJE

NIECH DANY BĘDZIE ZBIÓR 5-ELEMENTOWY  $\{1,2,3,4,5\}$ . ILE MOŻEMY UTWORZYĆ CIĄGÓW ZŁOŻONYCH ZE WSZYSTKICH ELEMENTÓW TEGO ZBIORU?

PIERWSZY ELEMENT WYBIERAMY NA 5 SPOSOBÓW

DRUGI ELEMENT WYBIERAMY NA 4 SPOSOBY

TRZECI ELEMENT WYBIERAMY NA 3 SPOSOBY ITD.

ZATEM 5-WYRAZOWE CIĄGI UTWÓZRYMY NA  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$  RÓŻNYCH SPOSOBÓW.

# PERMUTACJE

PERMUTACJĄ ZBIORU  $n$ -ELEMENTOWEGO NAZYWAMY KAŻDY  $n$ -WYRAZOWY CIĄG UTWORZONY ZE WSZYSTKICH ELEMENTÓW TEGO ZBIORU. ILOŚĆ PERMUTACJI ZBIORU  $n$ -ELEMENTOWEGO OBLICZAMY:

$$P_n = n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

$$0! = 1$$

# PERMUTACJE

## przykłady

1. ILE MOŻNA UTWORZYĆ RÓŻNOWARTOŚCIOWYCH CIĄGÓW 6-WYRAZOWYCH ZE ZBIORU 6-ELEMENTOWEGO.

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

2. ILE JEST PERMUTACJI ZBIORU 4-ELEMENTOWEGO, W KTÓRYCH 1 I 2 NIE WYSTĘPUJĄ OBOK SIEBIE.

Policzymy ile jest permutacji, w których 1 i 2 występują obok siebie i odejmiemy od ilości wszystkich permutacji

{1,2,3,4}

$$4! - 2! \cdot 3 \cdot 2 = 24 - 12 = 12$$

Ilość wszystkich permutacji

Ilość permutacji, w których 1 i 2 występują obok siebie

# WARIACJE BEZ POWTÓRZEŃ

NIECH DANY BĘDZIE ZBIÓR 5-ELEMENTOWY  $\{1,2,3,4,5\}$ .  
ILE MOŻNA UTWORZYĆ CIĄGÓW 3-WYRAZOWYCH,  
W KTÓRYCH WYRAZY SIĘ NIE POWTARZAJĄ?

PIERWSZY ELEMENT WYBIERAMY NA 5 MOŻLIWOŚCI

DRUGI ELEMENT WYBIERAMY NA 4 MOŻLIWOŚCI

TRZECI ELEMENT WYBIERAMY NA 3 MOŻLIWOŚCI

ZATEM 3-WYRAZOWE CIĄGI UTWORZYMY NA  $5 \cdot 4 \cdot 3$   
RÓŻNYCH SPOSOBÓW.

# WARIACJE BEZ POWTÓRZEŃ

$k$ -WYRAZOWĄ WARIACJĄ BEZ POWTÓRZEŃ WYBRANĄ ZE ZBIORU  $n$ -ELEMENTOWEGO NAZYWAMY KAŻDY  $k$ -WYRAZOWY RÓŻNOWARTOŚCIOWY CIĄG UTWORZONY Z ELEMENTÓW TEGO ZBIORU. ILOŚĆ  $k$ -WYRAZOWYCH WARIACJI BEZ POWTÓRZEŃ WYBRANYCH ZE ZBIORU  $n$ -ELEMENTOWEGO OBLICZAMY:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

# WARIACJE BEZ POWTÓRZEŃ

## przykłady

ILE RÓŻNYCH PIĘCIOCYFROWYCH LICZB MOŻNA UTWORZYĆ Z CYFR  $0, \dots, 9$  JEŻELI CYFRY NIE MOGĄ SIĘ POWTARZAĆ?

PIĘCIOWYRAZOWE WARIACJE BEZ POWTÓRZEŃ WYBRANE ZE ZBIORU 10-ELEMENTOWEGO.

NIE MOŻEMY JEDNAK WYBRAĆ ZERA NA POZATKU, BO TAKA LICZBA NIE BĘDZIE PIĘCIOCYFROWA!

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$$

PIERWSZY ELEMENT  
WYBIERAMY NA  
9 SPOSOBÓW,  
BO ORZUCAMY 0  
NA POZATKU

DRUGI ELEMENT  
WYBIERAMY NA  
9 SPOSOBÓW,  
BO JEDEN ELEMENT  
JUŻ ZOSTAŁ  
WYBRANY



# WARIACJE Z POWTÓRZENIAMI

NIECH DANY BĘDZIE ZBIÓR 5-ELEMENTOWY  $\{1,2,3,4,5\}$ . ILE MOŻNA UTWORZYĆ CIĄGÓW 3-WYRAZOWYCH?

PIERWSZY ELEMENT WYBIERAMY NA 5 MOŻLIWOŚCI

DRUGI ELEMENT WYBIERAMY NA 5 MOŻLIWOŚCI

TRZECI ELEMENT WYBIERAMY NA 5 MOŻLIWOŚCI

ZATEM 3-WYRAZOWE CIĄGI UTWORZYMY NA  $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$  RÓŻNYCH SPOSOBÓW.

# WARIACJE Z POWTÓRZENIAMI

$k$ -WYRAZOWĄ WARIACJĄ Z POWTÓRZENIAMI WYBRANĄ ZE ZBIORU  $n$ -ELEMENTOWEGO NAZYWAMY KAŻDY  $k$ -WYRAZOWY CIĄG UTWORZONY Z ELEMENTÓW TEGO ZBIORU. ILOŚĆ  $k$ -WYRAZOWYCH WARIACJI Z POWTÓRZENIAMI WYBRANYCH ZE ZBIORU  $n$ -ELEMENTOWEGO OBLICZAMY:

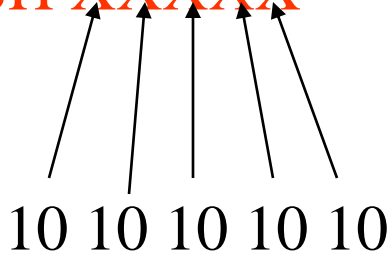
$$W_n^k = n^k$$

# WARIACJE Z POWTÓRZENIAMI

## przykłady

ILE JEST NUMERÓW REJESTRACYJNYCH W CHORZOWIE ZŁOŻONYCH Z SAMYCH CYFR?

SH XXXXX



PIĘCIOWYRAZOWE WARIACJE Z POWTÓRZENIAMI  
WYBRANE ZE ZBIORU 10-ELEMENTOWEGO:

$$W_{10}^5 = 10^5$$

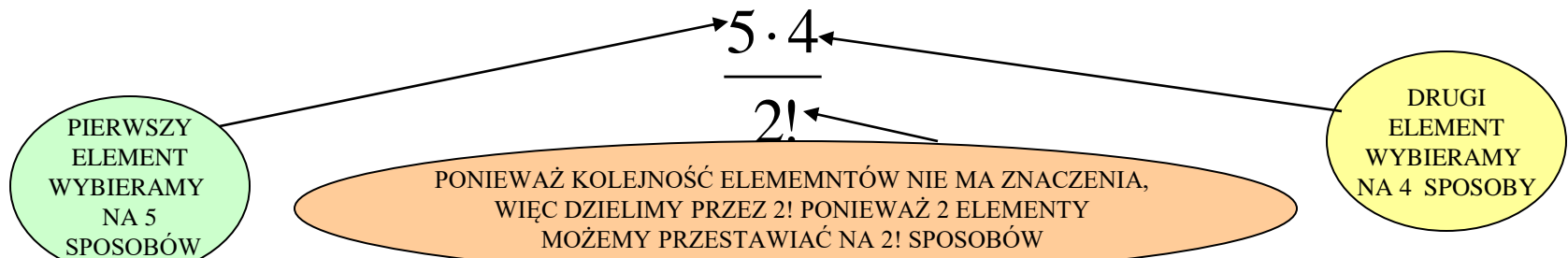
# KOMBINACJE {1,2,3,4,5}

NIECH DANY BĘDZIE ZBIÓR 5-ELEMENTOWY {1,2,3,4,5}.  
ILE MOŻNA UTWORZYĆ PODZBIORÓW (KOLEJNOŚĆ  
WYSTĘPOWANIA ELEMENTÓW NIE MA ZNACZENIA)  
1-ELEMENTOWYCH,  
Z ELEMENTÓW TEGO ZBIORU?

PODZBIORÓW JEDNOELEMENTOWYCH JEST 5.

ILE MOŻNA UTWORZYĆ PODZBIORÓW 2-ELEMENTOWYCH,  
Z ELEMENTÓW TEGO ZBIORU?

PODZBIORÓW DWUELEMENTOWYCH JEST 10



# KOMBINACJE {1,2,3,4,5}

ILE MOŻNA UTWORZYĆ POZBIORÓW 3-ELEMENTOWYCH,  
Z ELEMENTÓW TEGO ZBIORU?

PODZBIORÓW TRÓJELEMENTOWYCH JEST 10

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10$$

3-ELEMENTY MOŻEMY  
PRZESTAWIĆ NA 3! SPOSOBÓW

ILE MOŻNA UTWORZYĆ POZBIORÓW 4-ELEMENTOWYCH,  
Z ELEMENTÓW TEGO ZBIORU?

PODZBIORÓW CZTEROELEMENTOWYCH JEST 5

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4!} = 5$$

# KOMBINACJE {1,2,3,4,5}

ILE MOŻNA UTWORZYĆ POZBIORÓW 5-ELEMENTOWYCH,  
Z ELEMENTÓW TEGO ZBIORU?

PODZBIORÓW PIĘCIOELEMENTOWYCH JEST 1

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5!} = 1$$

$k$ -ELEMENTOWĄ KOMBINACJĄ WYBRANĄ ZE ZBIORU  $n$ -  
ELEMENTOWEGO NAZYWAMY KAŻDY  $k$ -ELEMENTOWY  
PODZBIÓR TEGO ZBIORU.

ILOŚĆ  $k$ -ELEMENTOWYCH KOMBINACJI WYBRANYCH ZE  
ZBIORU  $n$ -ELEMENTOWEGO OBLICZAMY:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

# KOMBINACJE

## przykłady

NA ILE SPOSOBÓW MOŻNA WYBRAĆ  
3-OSOBOWĄ DELEGACJĘ Z GRUPY 10 OSÓB?

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120$$

NA ILE SPOSOBÓW MOŻNA SKREŚLIĆ  
6 LICZB Z 49?

$$\frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 49 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 3 \cdot 44$$

# ZADANIA Z MATUR

## INFORMATOR MATURALNY ZESTAW P3

**Zadanie 20.** (1 pkt)

Wybieramy jedną liczbę ze zbioru  $\{3,4,5\}$  i jedną liczbę ze zbioru  $\{2,3\}$ . Na ile sposobów można wybrać te liczby tak, aby ich suma była liczbą nieparzystą?

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6



# ZADANIA Z MATUR

## INFORMATOR MATURALNY

11. W kolejce do kasy biletowej ustawiły się cztery dziewczynki i pięciu chłopców. Liczba wszystkich możliwych ustawień osób w tej kolejce wynosi

- a)  $4! + 5!$ .
- b)  $9!$ .
- c)  $4 \cdot 5$ .
- d)  $4! \cdot 5!$ .

# ZADANIA Z MATUR

## INFORMATOR MATURALNY

### **Zadanie 10. (1 pkt)**

Ile jest wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, w których obie cyfry są parzyste?

**A.** 16

**B.** 20

**C.** 24

**D.** 25

# ZADANIA Z MATUR

MATURA PRÓBNA LISTOPAD 2010

## **Zadanie 31. (2 pkt)**

Oblicz, ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, w których zapisie pierwsza cyfra jest parzysta, a pozostałe nieparzyste.

---

# ZADANIA Z MATUR

MATURA MAJ 2012

## Zadanie 24. (1 pkt)

Flagę, taką jak pokazano na rysunku, należy zszyć z trzech jednakowej szerokości pasów kolorowej tkaniny. Oba pasy zewnętrzne mają być tego samego koloru, a pas znajdujący się między nimi ma być innego koloru.

Liczba różnych takich flag, które można uszyć, mając do dyspozycji tkaniny w 10 kolorach, jest równa



A. 100

B. 99

C. 90

D. 19

# ZADANIA Z MATUR

MATURA PRÓBNA Z OPERONEM 2012

## **Zadanie 22. (1 pkt)**

W turnieju szachowym, rozgrywanym systemem każdy z każdym, bez rewanżu, miało brać udział 8 zawodników. Jeden z nich zrezygnował. Liczba zaplanowanych rozgrywek zmniejszyła się o:

**A. 1**

**B. 14**

**C. 7**

**D. 8**

# ZADANIA

1. NA ILE SPOSOBÓW MOŻNA POSADZIC 10 OSÓB NA 10 NUMEROWANYCH MIEJSCACH?
2. ILE JEST PERMUTCJI ZBIORU 5-ELEMENTOWEGO, W KTÓRYCH 2 *i* 3 NIE WYSTĘPUJĄ OBOK SIEBIE?
3. ILE MECZÓW ZOSTANIE ROZEGRANYCH W EKSTRAKLASIE PIŁKARSKIEJ JEŻELI LCZY ONA 16 ZESPOŁÓW GRA SIĘ KAŻDY Z KAŻDYM W RUNDZIE JESIENNEJ I WIOSENNEJ.
4. ILE JEST LICZB 6-CYFROWYCH UTWORZONYCH Z CYFR 0,1,...,9 JEŻELI:
  1. CYFRY NIE MOGĄ SIĘ POWTARZAĆ;
  2. CYFRY MOGĄ SIĘ POWTARZAĆ?