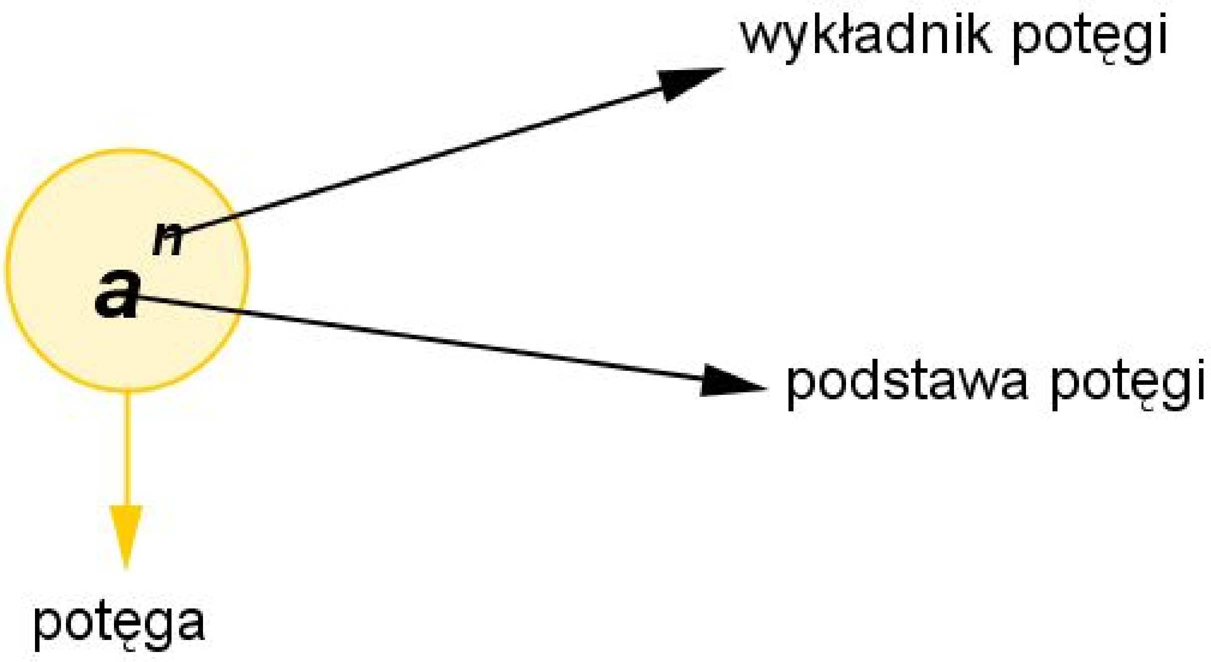
POTĘGA O WYKŁADNIKU NATURALNYM I CAŁKOWITYM

POTĘGOWANIE



POTĘGOWANIE

n – tą potęgą liczby *a* nazywamy
n – krotny iloczyn liczby *a* przez siebie.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$$

PRZYKŁADY

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$$

$$-3^2 = -3 \cdot 3 = -9$$

$$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$$

$$\sqrt{3}^2 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{9} = 3$$

ZADANIA

Oblicz:

$$a)\ -4^4 =$$

$$b)\left(-\frac{4}{3}\right)^3 =$$

$$c)(-3)^4 =$$

$$d)\ \sqrt{2}^2 =$$

$$e)\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3 =$$

$$f)\ -\sqrt{10}^2 =$$

WYKŁADNIKI CAŁKOWITE

Jeżeli *n* jest liczbą naturalną to *–n* jest liczbą całkowitą przeciwną do *n*.

Rozważmy symbol:

$$a^{-n}$$

wykładnik jest w tym przypadku liczbą ujemną.

WYKŁADNIKI CAŁKOWITE

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a}}_{n}$$

$$a^0 = 1$$

PRZYKŁADY

$$2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$(-3)^{-4} = \left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$$

$$\sqrt{5}^{-2} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5}$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{-4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = \frac{\overbrace{\sqrt{3}\quad\sqrt{3}}^{3}}{2 \cdot 2} \cdot \frac{\overbrace{\sqrt{3}\quad\sqrt{3}}^{3}}{2 \cdot 2} = \frac{9}{16}$$

ZADANIA

Oblicz:

$$a)\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=$$

$$c)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-1}=$$

$$b)\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{-3}=$$

$$d)\frac{2}{\left(\sqrt{8}\right)^{-1}}=$$

ODPOWIEDZI

SLAJD NR 9

$$a)\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2^1 = 2$$

$$b)\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^3 = \frac{8}{7\sqrt{7}}$$

$$c)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-1} = \sqrt{3}$$

$$d)\left(\frac{2}{\sqrt{8}^{-1}}\right) = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{8}}} = 2\cdot\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

MNOŻENIE POTĘG O TYCH SAMYCH PODSTAWACH

$$\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

$$2^5 \cdot 2^{-3} = 2^{5+(-3)} = 2^2$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4+(-2)} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

MNOŻENIE POTĘG O TYCH SAMYCH PODSTAWACH - przykłady

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3+3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4+(-3)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1} = \frac{2}{3}$$

$$3^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^4 \cdot 3^2 = 3^{4+2} = 3^6$$

MNOŻENIE POTĘG O TYCH SAMYCH PODSTAWACH – zadania do wykonania

$$15^2 \cdot 15^{-3} =$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-5} =$$

$$2^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} =$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{2} =$$

DZIELENIE POTĘG O TYCH SAMYCH PODSTAWACH

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} : \left(\frac{1}{3}\right)^{-7} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4-(-7)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3} = \frac{1}{27}$$

$$\frac{\sqrt{2}^5}{\sqrt{2}^3} = \sqrt{2}^{5-3} = \sqrt{2}^2 = 2$$

DZIELENIE POTĘG O TYCH SAMYCH PODSTAWACH - przykłady

$$5^{-5}:5^{-7}=5^{-5-(-7)}=5^{2}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{8}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{6}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{8-6}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2}=\frac{1}{9}$$

$$\frac{4^{2}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}}=\frac{4^{2}}{4^{3}}=4^{2-3}=4^{-1}=\frac{1}{4}$$

DZIELENIE POTĘG O TYCH SAMYCH PODSTAWACH – zadania do wykonania

$7^2 : 7^{-1} =$

$\left(\frac{1}{5}\right)^4 : 5^{-2} =$

$\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}}{\left(\frac{5}{4}\right)^{-2}} =$

$\frac{10^3 : 10^{-2}}{10^4} =$

DZIELENIE POTĘG O TYCH SAMYCH PODSTAWACH - przykłady

$$\frac{16^3}{4^5} = \frac{(4^2)^3}{4^5} = \frac{4^6}{4^5} = 4^{6-5} = 4^1 = 4$$

$$5^3 : \left(\frac{1}{125}\right)^{-2} = 5^3 : \left(\left(\frac{1}{5}\right)^3\right)^{-2} = 5^3 : \left(\frac{1}{5}\right)^{-6} =$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 2^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^4 = 4^{-2} \cdot 2^3 \cdot 8^{-4} = (2^2)^{-2} \cdot 2^3 \cdot (2^3)^{-4} =$$

$$2^{-4} \cdot 2^3 \cdot 2^{-12} = 2^{-4+3+(-12)} = 2^{-13}$$

MNOŻENIE POTĘG O TYCH SAMYCH WYKŁADNIKACH

$$\boldsymbol{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^4 = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$$

$$\sqrt{2}^3 \cdot \sqrt{3}^3 = \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}\right)^3 = \left(\sqrt{6}\right)^3$$

MNOŻENIE POTĘG O TYCH SAMYCH WYKŁADNIKACH -przykłady

$$6^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(6 \cdot \frac{1}{2}\right)^5 = 3^5 = 243$$

$$12^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 12 \cdot 12^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 =$$

$$12 \cdot \left(12 \cdot \frac{1}{3}\right)^2 = 12 \cdot 4^2 = 12 \cdot 16 = 192$$

DZIELENIE POTEG O TYCH SAMYCH WYKŁADNIKACH

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\frac{36^2}{9^2} = \left(\frac{36}{9}\right)^2 = 4^2 = 16$$

$$\frac{\sqrt{4}^3}{4^3} = \left(\frac{\sqrt{4}}{4}\right)^3 = \left(\frac{2}{4}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

DZIELENIE POTĘG O TYCH SAMYCH WYKŁADNIKACH -przykłady

$$\frac{64^3}{8^3} = \left(\frac{64}{8}\right)^3 = 8^3 = 512$$

$$\frac{5^4 \cdot 6^3}{30^3} = \frac{5 \cdot 5^3 \cdot 6^3}{30^3} = \frac{5 \cdot (5 \cdot 6)^3}{30^3} = \frac{5 \cdot 30^3}{30^3} = 5 \cdot \left(\frac{30}{30}\right)^3 = 5$$

POTĘGOWANIE POTĘGI

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$(3^2)^{-3} = 3^{-6}$$

$$8^4 = (2^3)^4 = 2^{12}$$

$$\left(\sqrt{5}^2\right)^5 = \sqrt{5}^{10}$$

PRZYKŁADY

Oblicz: $\frac{x^2 : (x^{-3})^{-2}}{(x^5)^{-1} \cdot x^6}$.

Rozwiązanie:

$$\frac{x^2 : (x^{-3})^{-2}}{(x^5)^{-1} \cdot x^6} = \frac{x^2 : x^6}{x^{-5} \cdot x^6} = \frac{x^{2-6}}{x^{-5+6}} = \frac{x^{-4}}{x^1} = x^{-4-1} = x^{-5}$$

DZIAŁANIA NA POTĘGACH

$$\frac{36^2 \cdot 100^2}{5^4 \cdot 3^4} = \frac{\left(6^2\right)^2 \cdot \left(10^2\right)^2}{5^4 \cdot 3^4} = \frac{6^4 \cdot 10^4}{5^4 \cdot 3^4} = \frac{(2 \cdot 3)^4 \cdot (2 \cdot 5)^4}{5^4 \cdot 3^4}$$

$$\frac{\cancel{3^4} \cdot 2^4 \cdot \cancel{5^4} \cdot 2^4}{\cancel{5^4} \cdot \cancel{3^4}} = 2^4 \cdot 2^4 = 2^8$$

ZADANIA – do wykonania

1. Oblicz:

$$\frac{y^{-1} : \left(y^{2}\right)^{-3} \cdot y^{2}}{\left(y^{2} : y^{-3}\right)^{2}} \qquad odp.\, y^{-3}$$

2. Zapisz w postaci potęgi liczby 2:

$$\frac{8 \cdot 2^{-4} : 4^{-3}}{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} : \frac{1}{16}\right)^{2}} \qquad odp.\, 2^{-7}$$

POTĘGI O WYKŁADNIKACH WYMIERNYCH

DEFINICJA: $$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

PRZYKŁADY:

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2 \ bo \ 2^3 = 8$$

$$81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3 \ bo \ 3^4 = 81$$

$$\left(-\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-\frac{1}{32}} = -\frac{1}{2} \ bo \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32}$$

PRZYKŁADY

$$125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5 \; bo \; 5^{3} = 125$$

$$\left(\frac{625}{256}\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{256}{625}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{256}{625}} = \frac{4}{5} \; bo \; \left(\frac{4}{5}\right)^{4} = \frac{256}{625}$$

$$(-64)^{\frac{1}{4}} = \text{nie istnieje}$$

$$\left(-\frac{1}{128}\right)^{-\frac{1}{7}} = \left(-\frac{1}{128}\right)^{-\frac{1}{7}} = (-128)^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{-128} = -2 \; bo \; (-2)^{7} = -128$$

POTĘGI O WYKŁADNIKACH WYMIERNYCH

DEFINICJA: $$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

PRZYKŁAD:

$$8^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$16^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = (2)^3 = 8$$

PRZYKŁADY

$$(-27)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{-27}\right)^2 = (-3)^2 = 9$$

$$(-16)^{-\frac{3}{4}} = \text{nie istnieje}$$

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{\frac{4}{9}}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

$$81^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{81}\right)^3 = 3^3 = 27$$

POTĘGA O WYKŁADNIKU WYMIERNYM – zadania do wykonania

Oblicz:

$$a)\ 9^{\frac{5}{2}} =$$

$$b)\ 25^{-\frac{3}{2}} =$$

$$c)\ (-81)^{\frac{3}{2}} =$$

$$d)\ \left(-\frac{64}{125}\right)^{-\frac{2}{3}} =$$

POTĘGA O WYKŁADNIKU WYMIERNYM – przykłady

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9} = 3^{\frac{1}{2}}\cdot 9^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}}\cdot\left(3^2\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} = 3^{\frac{3}{6}+\frac{4}{6}} = 3^{\frac{7}{6}}$$

$$\frac{\sqrt{216}\cdot 6^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{36}} = \frac{216^{\frac{1}{2}}\cdot 6^{\frac{1}{2}}}{36^{\frac{1}{3}}} = \frac{\left(6^3\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 6^{\frac{1}{2}}}{\left(6^2\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{6^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}}{6^{\frac{2}{3}}} = 6^{2-\frac{2}{3}} = 6^{\frac{4}{3}}$$

POTĘGA O WYKŁADNIKU WYMIERNYM – zadania do wykonania

$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} =$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{9}} \cdot \sqrt{27} =$$

$$\frac{\sqrt{125} \cdot 5^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{25}} =$$