



WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA

HARALD KAJZER - WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA

ZAKRES TEMATYCZNY

1. Wartość bezwzględna – definicja.
2. Odległość liczb na osi liczbowej.
3. Równania z wartością bezwzględną.
4. Wartość bezwzględna i przedziały.
5. Nierówności z wartością bezwzględną.

DEFINICJA

Wartość bezwzględna z dowolnej liczby rzeczywistej a wynosi:

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

DEFINICJA

wartość bezwzględna z liczby jest:

- **tą samą liczbą**, jeżeli mamy do czynienia z liczbą nieujemną;
- **liczbą przeciwną** do danej, gdy mamy do czynienia z liczbą ujemną np.

$$|\sqrt{3}| = \sqrt{3} \quad \text{bo} \quad \sqrt{3} \geq 0$$

$$|-\pi| = \pi \quad \text{bo} \quad -\pi < 0$$

$$|0| = 0 \quad \text{bo} \quad 0 \geq 0$$

PRZYKŁADY

obliczanie wartości bezwzględnej z liczb rzeczywistych

Aby zapisać wyrażenie bez użycia symbolu wartości bezwzględnej należy ustalić znak wyrażenia, które znajduje się pod wartością bezwzględną

$$|\pi - 3| = \pi - 3 \quad \text{bo} \quad \pi - 3 \geq 0$$

$$|3\pi - 10| = -(3\pi - 10) = 10 - 3\pi \quad \text{bo} \quad 3\pi - 10 < 0$$

$$|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3} \quad \text{bo} \quad 2 - \sqrt{3} \geq 0$$

$$|2\sqrt{2} - 3| = -(2\sqrt{2} - 3) = 3 - 2\sqrt{2} \quad \text{bo} \quad 2\sqrt{2} - 3 < 0$$

ZADANIA

obliczanie wartości bezwzględnej z liczb rzeczywistych

Zapisz liczby bez użycia symbolu wartości bezwzględnej:

$$|\pi - 3,2| =$$

$$|5 - \sqrt{24}| =$$

$$|\sqrt{37} - 6| =$$

$$|2\sqrt{3} - 4| =$$

$$|2\sqrt{5} - 4| =$$

ZADANIA

zastosowanie symbolu wartości bezwzględnej

$$\sqrt{16} = 4 \text{ lub } \sqrt{16} = -4$$

Czyli: $\sqrt{16} = |4|$

Zapisz bez użycia symbolu pierwiastka:

$$\sqrt{(x - 1)^2} = |x - 1|$$

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x - 3)^2} = |x - 3|$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

ZADANIA

zastosowanie symbolu wartości bezwzględnej

$$\sqrt{x^2 + 10x + 25} = |x + 5|$$
$$\begin{array}{c} \uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \\ a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \end{array}$$

$$\sqrt{x^2 - 8x + 16} = |x - 4|$$

$$\sqrt{(2x + 5)^2} = |2x + 5|$$

WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA I ODLEGŁOŚĆ NA OSI LICZBOWEJ

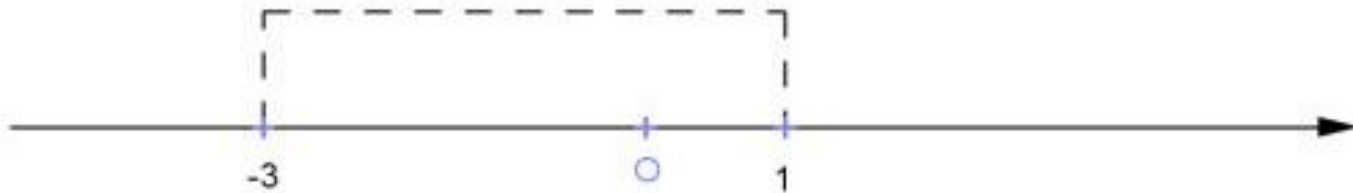
Geometrycznie wartość bezwzględna opisuje odległość między dwoma punktami na osi liczbowej.



np.

$$|x_D - x_C|$$

$$|1 - (-3)| = 4$$



WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA I ODLEGŁOŚĆ NA OSI LICZBOWEJ

Przykłady:



odległość między punktem 1 i punktem 7 wynosi
 $|7 - 1| = 6$



odległość między tymi punktami wynosi
 $|5 - (-2)| = 7$

RÓWNANIA Z WARTOŚCIĄ BEZWZGLĘDNĄ

ROZWIĄŻ RÓWNANIE: $|x|=4$.

ROZWIĄZANIE:

SZUKAMY LICZB, KTÓRE SĄ ODDALONE OD PUNKTU „0”
O CZTERY JEDNOSTKI, OCZYWIŚTYM JEST, ŻE SĄ TO LICZBY:



$$x = 4 \quad \text{lub} \quad x = -4$$

BO

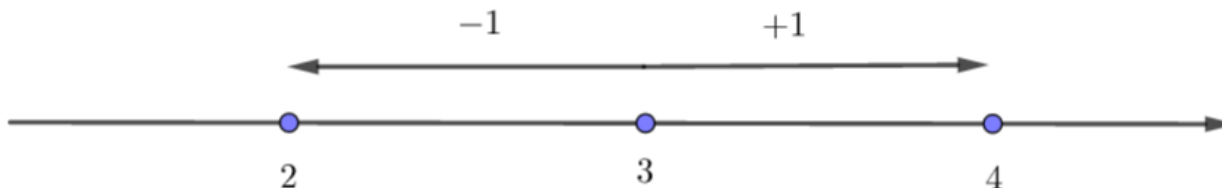
$$|4|=4 \quad \text{lub} \quad |-4|=4$$

RÓWNANIA Z WARTOŚCIĄ BEZWZGLĘDNĄ

ROZWIĄŻ RÓWNANIE: $|x - 3| = 1$.

ROZWIĄZANIE:

SZUKAMY LICZB, KTÓRE SĄ ODDALONE OD PUNKTU „3” O JEDNĄ JEDNOSTKĘ:



$$\begin{aligned}x - 3 = 1 & \quad \text{lub} \quad x - 3 = -1 \\x = 4 & \quad \text{lub} \quad x = 2\end{aligned}$$

BO

$$|4 - 3| = 1 \quad \text{lub} \quad |2 - 3| = 1$$

RÓWNANIA Z WARTOŚCIĄ BEZWZGLĘDNĄ

ROZWIĄŻ RÓWNANIE: $\left| \frac{1}{2}x + 3 \right| = 2$

ROZWIĄZANIE:

$$\frac{1}{2}x + 3 = 2 \quad \text{lub} \quad \frac{1}{2}x + 3 = -2$$

$$\frac{1}{2}x = -1 \quad / \cdot 2 \quad \text{lub} \quad \frac{1}{2}x = -5 \quad / \cdot 2$$

$$x = -2 \quad \text{lub} \quad x = -10$$

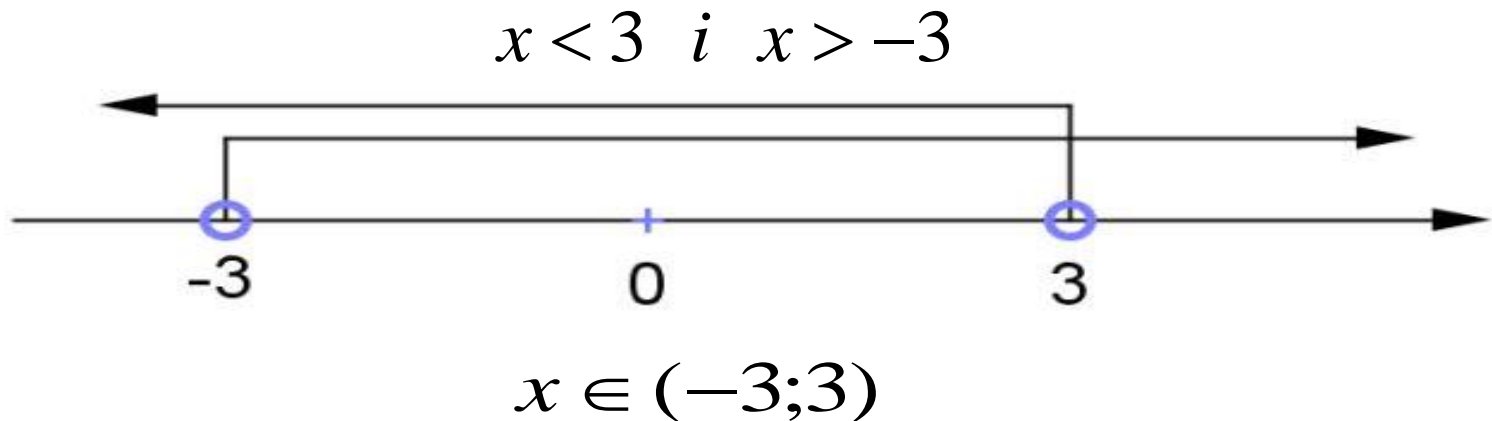
PRZEDZIAŁY SYMETRYCZNE WZGLĘDEM ZERA

Znajdź rozwiązanie algebraiczne i graficzne nierówności:

$$|x| < 3$$

Rozwiązanie:

Szukamy liczb, których odległość od zera na osi liczbowej jest mniejsza od 3



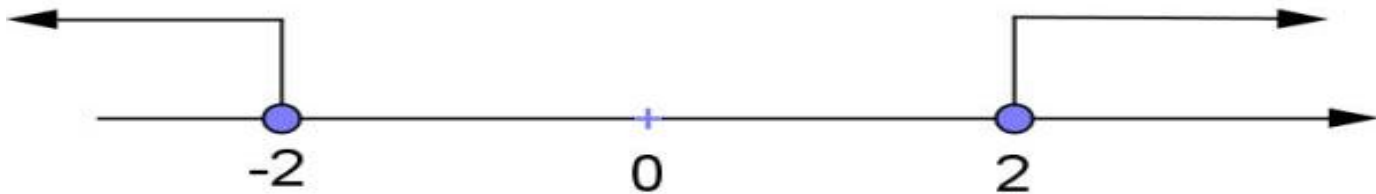
PRZEDZIAŁY SYMETRYCZNE WZGLĘDEM ZERA

Jaki zbiór opisuje nierówność:

$$|x| \geq 2?$$

Poszukujemy liczb, które są położone na osi liczbowej w odległości co najmniej dwóch jednostek od zera.

$$x \leq -2 \text{ lub } x \geq 2$$



$$x \in (-\infty; -2 > \cup < 2; +\infty)$$

PRZEDZIAŁY O INNYM ŚRODKU SYMETRII

Rozwiąż algebraicznie i graficznie nierówność:

Rozwiązanie:

$$|x + 3| > 1$$

$$x + 3 > 1 \text{ lub } x + 3 < -1$$

$$x > -2 \text{ lub } x < -4$$



$$x \in (-\infty; -4) \cup (-2; +\infty)$$

PRZEDZIAŁY O INNYM ŚRODKU SYMETRII

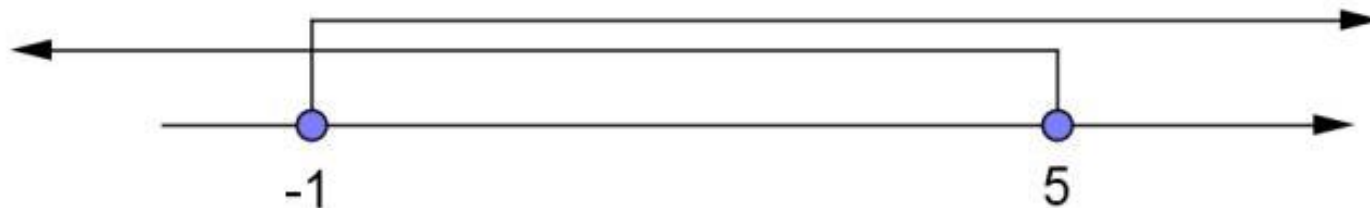
Znajdź zbiór, który opisuje nierówność:

$$|2x - 4| \leq 6$$

$$2x - 4 \leq 6 \text{ i } 2x - 4 \geq -6$$

$$2x \leq 10 \text{ i } 2x \geq -2$$

$$x \leq 5 \text{ i } x \geq -1$$



$$x \in \langle -1; 5 \rangle$$

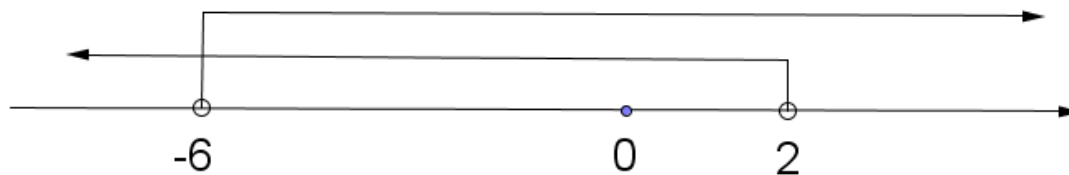
NIERÓWNOŚCI Z WARTOŚCIĄ BEZWGLĘDNĄ

ROZWIĄŻ NIERÓWNOŚĆ: $|x + 2| < 4$

ROZWIĄZANIE:

$$x + 2 < 4 \quad i \quad x + 2 > -4$$

$$x < 2 \quad i \quad x > -6$$



$$x \in (-6; 2)$$

NIERÓWNOŚCI Z WARTOŚCIĄ BEZWGLĘDNĄ

ROZWIĄŻ NIERÓWNOŚĆ $\left| \frac{1}{2}x - 3 \right| \geq 5$ I ZAZNACZ NA OSI LICZBOWEJ ZBIÓR ROZWIĄZAŃ.

ROZWIĄZANIE:

$$\frac{1}{2}x - 3 \geq 5 \quad \text{lub} \quad \frac{1}{2}x - 3 \leq -5$$

$$\frac{1}{2}x \geq 8 / \cdot 2 \quad \text{lub} \quad \frac{1}{2}x \leq -2 / \cdot 2$$

$$x \geq 16 \quad \text{lub} \quad x \leq -4$$



ZADANIA 2

1. ROZWIĄŻ RÓWNANIA:

a) $|x - 10| = 2$

b) $|5x - 2| = 3$

c) $\left| \frac{2}{3}x + 2 \right| = 7$

2. ROZWIĄŻ NIERÓNOŚCI I ZAZNACZ ROZWIĄZANIE NA OSI LICZBOWEJ:

a) $|x| \geq 2$

b) $|x + 4| < 2$

c) $|2x - 7| \leq 11$