



WIELOMIANY

HARALD KAJZER ZST NR 2

DEFINICJA WIELOMIANU

Wielomianem stopnia n nazywamy funkcję postaci:

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

gdzie:

$$a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

np.

$$3x^2 + 9x - 11$$

$$-4x^8 - 3x^6 + 1$$

są wielomianami
stopnia 2 i 8

RÓWNOŚĆ WIELOMIANÓW

Dwa wielomiany $W(x)$ i $H(x)$ są równe gdy:

1. Są równych stopni
2. Mają identyczne współczynniki przy tych samych potęgach np.

$$W(x) = 2x^5 - x^3 + 2 \text{ i } H(x) = 2x^5 + x^3 + 2$$

nie są równe bo współczynniki przy x^3 nie są identyczne.

RÓWNOŚĆ WIELOMIANÓW - PRZYKŁAD

Dla jakich wartości a, b, c, d, e zachodzi równość:

$$(2x^2 - 3)^2 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e?$$

$$(2x^2)^2 - 2 \cdot 2x^2 \cdot 3 + 9 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$4x^4 - 12x^2 + 9 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$a = 4, b = 0, c = -12, d = 0, e = 9$$

RÓWNOŚĆ WIELOMIANÓW - ZADANIA

Dla jakich wartości liczb p, q, r, s wielomiany

$$K(x) = (x^2 - 2x + 1)(2x - 3) \text{ i } J(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$$

są równe?

DODAWANIE I ODEJMOWANIE WIELOMIANÓW

Dodawanie i odejmowanie wielomianów polega na dodaniu i odjęciu wyrazów podobnych (wyrażenia podobne to takie, które zawierają te same litery w tych samych potęgach).

$2a^2b$ i $-5a^2b$ są podobne

$3a^2b$ i $-4ab^2$ nie są podobne

DODAWANIE I ODEJMOWANIE WIELOMIANÓW - PRZYKŁADY

$$(\underline{2x^2} - 4x + \underline{\underline{3}}) - (x^3 - \underline{5x^2} + \underline{\underline{1}}) =$$
$$-x^3 + 7x^2 - 4x + 2$$

$$(3x^4 - 2x^2 + 6x - 7) + (x^4 - 3x^2 - 4x - 1) =$$
$$4x^4 - 5x^2 + 2x - 8$$

MNOŻENIE WIELOMIANÓW

Mnożenie wielomianów polega na przemnożeniu każdego składnika jednego wielomianu przez każdy składnik drugiego wielomianu, a następnie na redukcji wyrazów podobnych.

Np.

$$(3x - 1)(x + 5) =$$

$$3x^2 + 15x - x - 5 = 3x^2 + 14x - 5$$

MNOŻENIE WIELOMIANÓW - PRZYKŁADY

$$(2x^2 + 3x - 1)(3x^2 - 2x) =$$

$$6x^4 - 4x^3 + 9x^3 - 6x^2 - 3x^2 + 2x =$$

$$6x^4 + 5x^3 - 9x^2 + 2x$$

DZIAŁANIA NA WIELOMIANACH - ZADANIA

Dane są wielomiany:

$$W(x) = x^3 - 2, \quad G(x) = 3x - 5, \quad H(x) = x^2 - 4x + 2$$

wykonaj działania:

1) $W(x) - G(x) \cdot H(x)$

2) $G(x) \cdot H(x) - W(x)$

3) $W(x) \cdot G(x) - H(x)$

ROZWIĄZANIE

przykład 1)

$$\begin{aligned} W(x) - G(x) \cdot H(x) &= \underbrace{x^3 - 2}_{W(x)} - \underbrace{(3x - 5)}_{G(x)} \underbrace{(x^2 - 4x + 2)}_{H(x)} = \\ &= x^3 - 2 - (3x^3 - 12x^2 + 6x - 5x^2 + 20x - 10) \\ &= \underline{\underline{x^3 - 2}} - 3x^3 + 12x^2 - 6x + 5x^2 - 20x + \underline{\underline{10}} \\ &= -2x^3 + 12x^2 - 6x + 5x^2 - 20x + 8 \end{aligned}$$

DZIELENIE PISEMNE

DZIELENIE WIELOMIANÓW SPOSOBEM PISEMNYM WYKONYJE SIĘ IDENTYCZNIE JAK DZIELENIE LICZB SPOSOBEM PISEMNYM.

$$\begin{array}{r} 25:3 \longrightarrow 85 \longleftarrow 15:3 \\ \hline 255:3 \\ - 24 \longleftarrow 8 \cdot 3 \\ \hline 15 \\ \hline 15 \\ \hline \hline \end{array}$$

DZIELENIE WIELOMIANÓW

$x^3 : x$

$3x^2 : x$

$2x : x$

$$x^2 + 3x + 2$$

$$(x^3 + 6x^2 + 11x + 6) : (x + 3)$$

$$-(x^3 + 3x^2)$$

$$3x^2 + 11x + 6$$

$$-(3x^2 + 9x)$$

$$2x + 6$$

$$-(2x + 6)$$

$$= =$$

$x^2 \cdot x$ i $x^2 \cdot 3$

$3x \cdot x$ i $3x \cdot 3$

$2 \cdot x$ i $2 \cdot 3$

TWIERDZENIE BEZOUTA

TWIERDZENIE:

LICZBA r JEST PIERWIASTKIEM WIELOMIANU $W(x)$
WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY WIELOMIAN $W(x)$
JEST PODZIELNY BEZ RESZTY PRZEZ DWUMIAN $x - r$.

WNIOSEK:

RESZTA Z DZIELENIA WIELOMIANU $W(x)$ PRZEZ
DWUMIAN $x - r$ WYNOŚI $W(r)$.

TWIERDZENIE BEZOUTA - ZADANIA

OBLICZ RESZTĘ Z DZIELENIA WIELOMIANU

$$G(x) = 2x^4 - 3x^2 + x - 5$$

PRZEZ DWUMIAN $2x - 4$.

$$2x - 4 = 2(x - 2) \Rightarrow r = 2$$

$$\begin{aligned} G(2) &= 2 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^2 + 2 - 5 = \\ &= 32 - 12 + 2 - 5 = 17 \longrightarrow \text{RESZTA} \end{aligned}$$

TWIERDZENIE BEZOUTA

INFORMATOR MATURALNY OD 2015

Zadanie 5. (0–2)

Wielomian $W(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6px + 9$ jest podzielny przez dwumian $x - 1$. Oblicz p .
Zakoduj pierwsze trzy cyfry po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

$$w(1) = 0 \quad \text{NA PODSTAWIE TWIERDZENIA BEZOUTA}$$

$$w(1) = 1^4 + 2 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^2 - 6p + 9 = -6p + 7 = 0$$

$$-6p + 7 = 0 \Rightarrow p = \frac{7}{6}$$

$$p = 1,1666\dots \quad \text{KODUJEMY CYFRY 1,6,6}$$

TWIERDZENIE O PIERWIASTKACH WYMIERNYCH

NIECH DANY BĘDZIE WIELOMIAN

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

O WSPÓŁCZYNNIKACH CAŁKOWITYCH TZN.

$$a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \{ \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}.$$

JEŻELI LICZBA WYMIERNA $\frac{p}{q}$

JEST PIERWIASTKIEM TEGO WIELOMIANU, TO p
JEST DZIELNIKIEM WYRAZU WOLNEGO a_0 ,
NATOMIAST q JEST DZIELNIKIEM WSPÓŁCZYNNIKA
PRZY NAJWYŻSZEJ POTĘDZE a_n .

TWIERDZENIE O PIERWIASTKACH WYMIERNYCH - ZADANIA

ZNAJDŹ PIERWIASTKI WIELOMIANU

$$W(x) = 4x^3 + 4x^2 - x - 1$$

$$p \in \{1, -1\} \quad q \in \{1, -1, 2, -2, 4, -4\} \quad \frac{p}{q} \in \left\{ 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4} \right\}$$

$$W(1) = 4 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1 - 1 - 1 \neq 0 \quad 1 \text{ NIE JEST PIERWIASTKIEM}$$

$$W(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 4 \cdot (-1)^2 - 1 - 1 = 0 \quad \text{PIERWIASTEK}$$

$$W\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 1 = 0 \quad \text{PIERWIASTEK}$$

$$W\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 1 = 0 \quad \text{PIERWIASTEK}$$

TWIERDZENIE O PIERWIASTKACH CAŁKOWITYCH

JEŻELI WIELOMIAN MA PIERWIASTEK CAŁKOWITY,
TO JEST ON DZIELNIKIEM WYRAZU WOLNEGO.

ZNAJDŹ PIERWIASTKI WIELOMIANU WIEDZĄC,
ŻE SĄ ONE CAŁKOWITE.

$$F(x) = x^3 - 7x + 6$$

$$r \in \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$$

PIERWIASTEK CAŁKOWITY MUSI
NALEŻEĆ DO ZBIORU
DZIELNIKÓW WYRAZU WOLNEGO.

$$F(1) = 1^3 - 7 \cdot 1 + 6 = 0$$

$$F(2) = 2^3 - 7 \cdot 2 + 6 = 0$$

$$F(-3) = (-3)^3 - 7 \cdot (-3) + 6 = 0$$

RÓWNANIA WIELOMIANOWE

ROZWIĄŻ RÓWNANIE WIEDZĄC, ŻE JEDEN JEGO
PIERWIASTEK JEST LICZBĄ CAŁKOWITĄ:

$$6x^3 - 13x^2 + 4 = 0$$

$$p \in \{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$$

$$W(2) = 6 \cdot 2^3 - 13 \cdot 2^2 + 4 = 48 - 52 + 4 = 0$$

$$(6x^3 - 13x^2 + 4) : (x - 2) = 6x^2 - x - 2$$

SZUKAMY
PIERWIASTKÓW
CZYNNIKA
KWADRATOWEGO

TW.
BEZOUTA

$$\Delta = 1 + 48 = 49$$

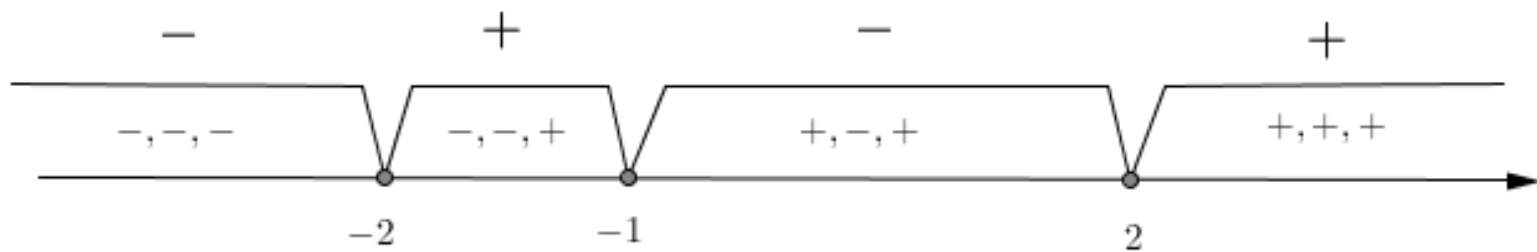
$$x_3 = 2$$

$$x_1 = \frac{1-7}{12} = -\frac{1}{3} \quad x_2 = \frac{1+7}{12} = \frac{2}{3}$$

NIERÓWNOŚCI WIELOMIANOWE

ROZWIĄŻ NIERÓWNOŚĆ: $(x+1)(2x-4)(3x+6) > 0$

$$x = -1, x = 2, x = -2$$



$$x \in (-2; -1) \cup (2; \infty)$$

NIERÓWNOŚCI WIELOMIANOWE

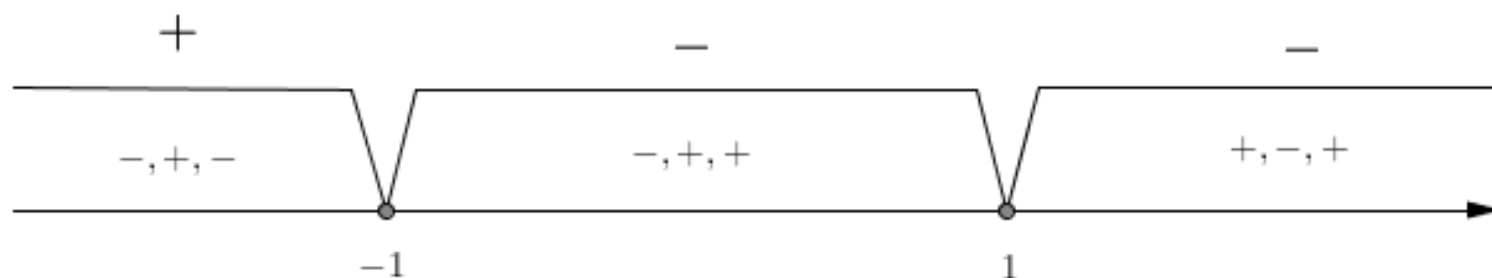
ROZWIĄŻ NIERÓWNOŚĆ: $-x^3 + x^2 + x - 1 \leq 0$

$$-x^2(x-1) + (x-1) \leq 0$$

$$(x-1)(1-x^2) \leq 0$$

$$(x-1)(1-x)(1+x) \leq 0 \quad \text{PIERWIASTEK DWUKROTNY}$$

$$x = 1, x = -1$$



$$x \in < -1; \infty)$$

ZADANIA

1. Dla jakiej wartości parametru p wielomian $h(x) = x^3 + px^2 - 5x + 6$ jest podzielny przez dwumian $x+1$.
2. Wykonaj dzielenie:
 - a) $(x^3 - 3x^2 + 2x - 1) : (x + 3)$;
 - b) $(x^4 - 2x^2 + 5x + 3) : (x^2 - 1)$;
 - c) $(2x^5 - 4x^4 + x^3 - 6x^2 + 7x - 2) : (2x + 1)$.
3. Znajdź pierwiastki wielomianu $h(x) = 6x^3 + 5x^2 - 12x + 4$ wiedząc, że jeden jest liczbą całkowitą.
4. Rozwiąż nierówności:
 - a) $x^3 - 3x^2 - 2x + 6 \leq 0$;
 - b) $(x - 3)^2(x + 1)(x - 1) > 0$.